

I prova in itinere

1. Si indichi con X una V.C. gaussiana con $E[X] = 2$, $\text{Var}[X] = 1$.

1.a Calcolare $E[X^2]$.

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \text{Var}[X] + E[X]^2 = 5$$

1.b Dimostrare che $E[\chi^2_N] = N$, dove χ^2_N indica la V.C. "chi quadro" ad N gradi di libertà.

Suggerimento: date N variabili gaussiane standard Z_i , indipendenti, $\chi^2_N = \dots$

$$\chi^2_N = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_N^2$$

$$E[\chi^2_N] = \sum_{i=1}^N E[Z_i^2] = N$$

Infatti, $E[Z_i^2] = \text{Var}[Z_i] + E[Z_i]^2 = 1$

2. Date delle V.C. X e Y congiuntamente gaussiane con $E[X] = E[Y] = 0$, si considerino le seguenti triplette di varianze e covarianze:

1) $\sigma_X^2 = 9, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = 0$

2) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 9, \sigma_{XY} = 0$

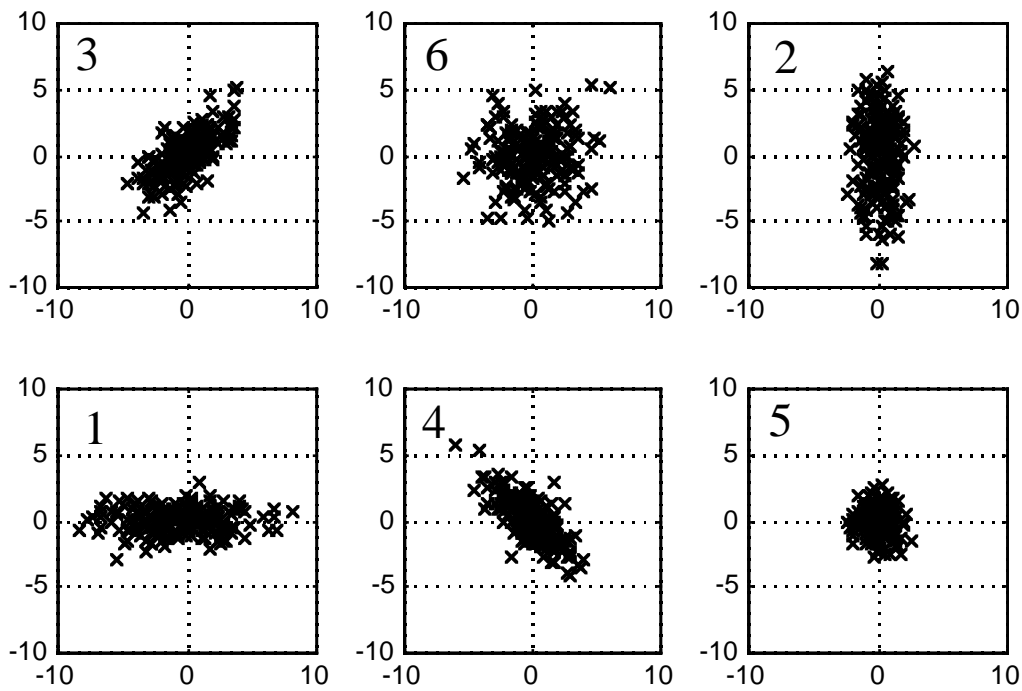
3) $\sigma_X^2 = 3, \sigma_Y^2 = 3, \sigma_{XY} = 2.1$

4) $\sigma_X^2 = 3, \sigma_Y^2 = 3, \sigma_{XY} = -2.1$

5) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = 0$

6) $\sigma_X^2 = 4, \sigma_Y^2 = 4, \sigma_{XY} = 0$

Riportare sopra i seguenti scatter plot il numero della corrispondente tripletta $\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_{XY}$



3. Sia $Y = \alpha Z + \beta$, dove $Z \sim N(0,1)$. Si considerino le seguenti scelte per i parametri α e β :

1) $\alpha = -2, \quad \beta = 0$

2) $\alpha = -0.5, \quad \beta = 0$

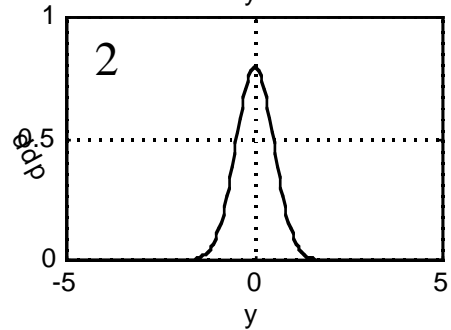
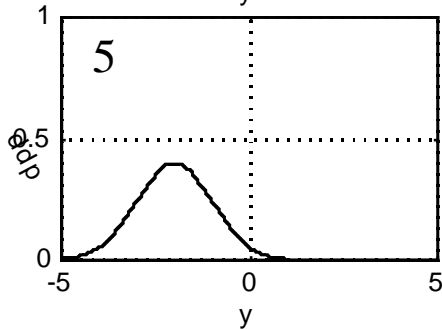
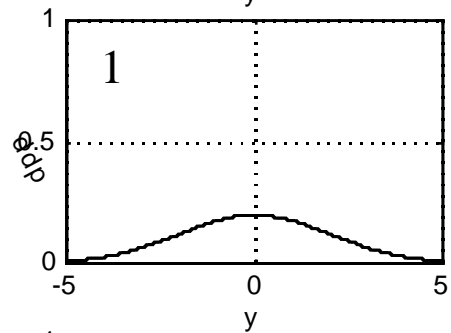
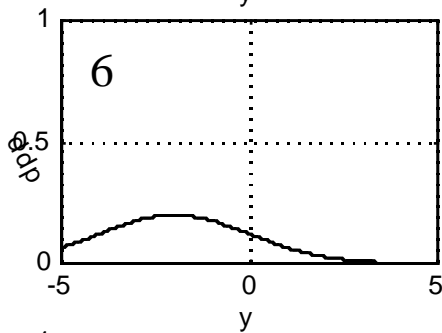
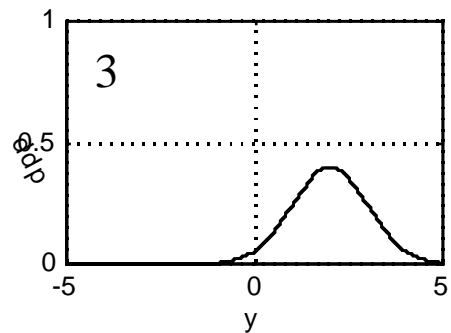
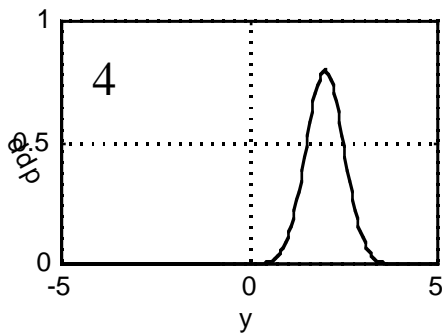
3) $\alpha = 1, \quad \beta = 2$

4) $\alpha = 0.5, \quad \beta = 2$

5) $\alpha = -1, \quad \beta = -2$

6) $\alpha = 2, \quad \beta = -2$

Riportare sopra i seguenti grafici delle densità di probabilità di Y il numero della corrispondente coppia α, β



4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

- Se Y è una V.C. lognormale, allora $X = e^Y$ è una V.C. gaussiana.

- Lanciando due volte una moneta onesta la probabilità di ottenere testa almeno una volta è pari a 0.75.

- Un sacchetto contiene una moneta onesta ed una moneta truccata con $P(\text{Testa}) = 0.7$. Si sceglie ad occhi chiusi una moneta e la si lancia. In tale esperimento, $P(\text{Testa}) = 0.6$.

- Nell'identificazione ai minimi quadrati di un modello lineare nei parametri, se $n=q$, la condizione di identificabilità è sicuramente verificata (n : numero dei dati, q : numero dei parametri).

- Se identifico mediante i minimi quadrati una famiglia di modelli gerarchici, la somma dei quadrati dei residui decresce al crescere del numero dei parametri del modello.

- L'uso del criterio FPE (sotto le sue ipotesi di applicabilità) conduce ad una stima polarizzata del numero dei parametri del modello..

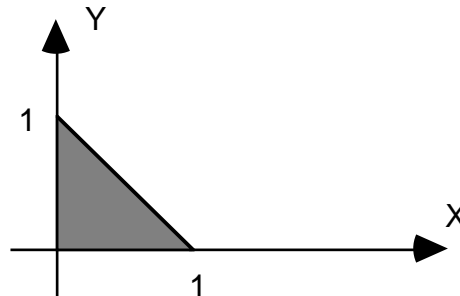
- Se $Y = \Phi\theta + V$, con $E[V] = 0$, e $\text{Var}[V] = \sigma^2 I$, allora lo stimatore LS coincide con lo stimatore BLUE (Best Linear Unbiased Estimator).

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$, $E[X_i] = m$. Allora, se N quadruplica, l'intervallo di confidenza per m si dimezza.

- Se X e Y sono due V.C. congiuntamente gaussiane con $E[XY] = E[X]E[Y]$, allora X e Y sono indipendenti.

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, 100$, $E[X_i] = m$, $\text{Var}[X_i] = 1$. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [\bar{X} - \delta, \bar{X} + \delta]$ con $\delta < 0.2$.

1. Si considerino le due V.C. X e Y, coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile nel triangolo riportato in figura.



- 1.a Ricavare la d.d.p. congiunta $f_{XY}(x,y)$.

Dato che lo spazio degli esiti è equiprobabile,

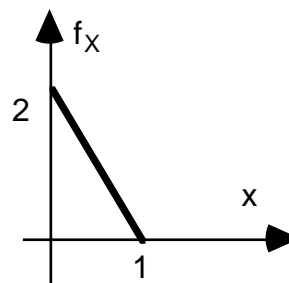
$$f_{XY}(x,y) = 1/(\text{Area del triangolo}) = 1/0.5 = 2, \text{ nel triangolo}$$

$$f_{XY}(x,y) = 0, \text{ altrove}$$

- 1.b Ricavare $f_X(x)$ e tracciarne il grafico.

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 2dx = 2(1-x), 0 \leq x \leq 1$$

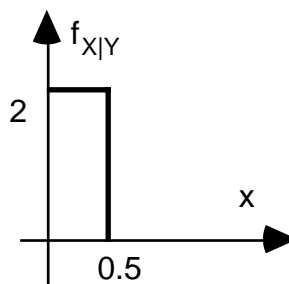
$$f_X(x) = 0, \text{ altrove}$$



- 1.c Ricavare $f_{X|Y}(x|Y=0.5)$ e tracciarne il grafico.

$$f_{X|Y}(x|Y=0.5) = \frac{f_{XY}(x,0.5)}{f_Y(0.5)} = 2, 0 \leq x \leq 0.5$$

$$f_{X|Y}(x|Y=0.5) = 0, \text{ altrove}$$



- 1.d Dire, motivando la risposta, se X e Y sono indipendenti.

No, perchè $f_{X|Y}(x|Y=0.5) \neq f_X(x)$.

2. Date due V.C. V e W gaussiane standard e indipendenti tra di loro, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y :

1. $X = V + W$
 $Y = V - W$

2. $X = V$
 $Y = V + W$

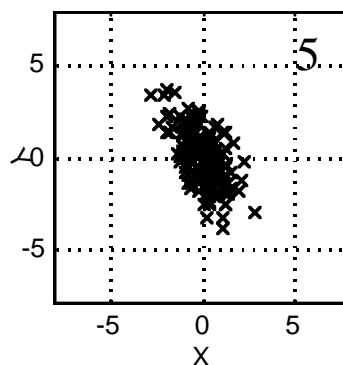
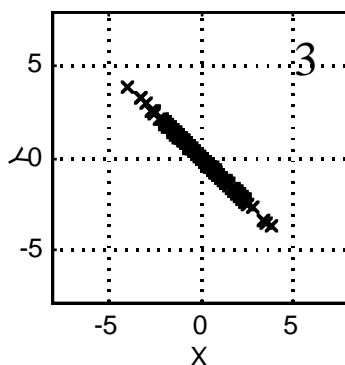
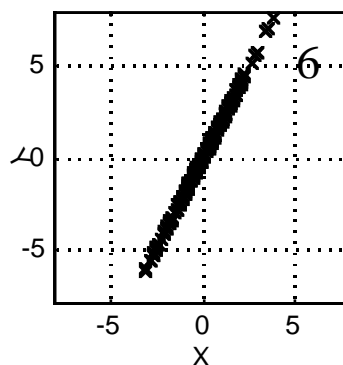
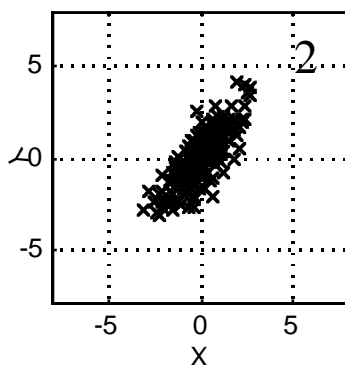
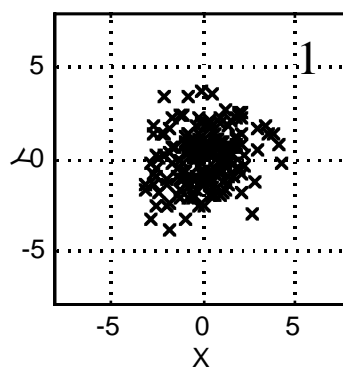
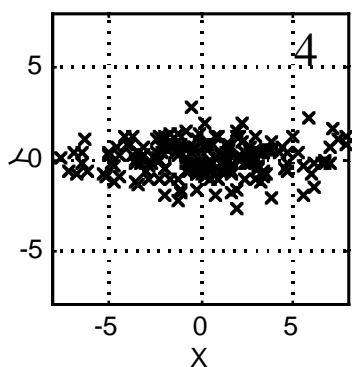
3. $X = V - W$
 $Y = -V + W$

4. $X = 3V$
 $Y = W$

5. $X = W$
 $Y = V - W$

6. $X = V + W$
 $Y = 2V + 2W$

Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta



3. Dimostrare le seguenti relazioni

3.a $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$$\text{Var}[X] = E[(X-E[X])^2] = E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

3.b $\text{Cov}[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$\text{Cov}[X,Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY] - 2E[X]E[Y] + E[X]E[Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

• Se due eventi A e B sono indipendenti, allora $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

V F

• $\text{Var}[X+Y]=\text{Var}[X]+\text{Var}[Y]$ se e solo se X e Y sono indipendenti.

• Se $Y:=X+b$, allora $f_Y(y) = f_X(y-b)$.

• L'uso del criterio MDL (sotto le sue ipotesi di applicabilità) conduce ad una stima non polarizzata del numero dei parametri del modello.

• Uno stimatore $\hat{\theta}$ si dice consistente se $E[\hat{\theta}] = \theta$.

1. Si consideri il seguente processo casuale

$$y(t) = -0.9y(t-1) + w(t-1) + 10w(t-2), \quad w(\cdot) \sim \text{WGN}(0,1)$$

1.a Ricavare il fattore spettrale canonico.

$$Y(z) = \frac{z^{-1} + 10z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1}} W(z) \Rightarrow G(z) \frac{z + 10}{z^2 + 0.9z}, \text{ non canonico}$$

$$T(z) = 10 \frac{z + 1/10}{z + 10}, \quad zG(z)T(z) = 10 \frac{z + 1/10}{z + 0.9}, \text{ non canonico}$$

$$\hat{G}(z) = \frac{1 + 0.1z^{-1}}{1 + 0.9z^{-1}}, \quad \hat{\sigma}^2 = 100$$

1.b Ricavare il predittore ottimo ad un passo per il seguente modello ARMAX:

$$y(t) = -0.9y(t-1) + 2u(t-1) + 10u(t-2) + w(t-1) + 10w(t-2), \quad w(\cdot) \sim \text{WGN}(0,1)$$

$$A(z)Y(z) = z^{-1}B(z)U(z) + C(z)W(z), \quad A(z) = 1 + 0.9z^{-1}, \quad B(z) = 2 + 10z^{-1}, \quad C(z) = z^{-1} + 10z^{-2}$$

Devo rendere canonico $C(z)/A(z)$:

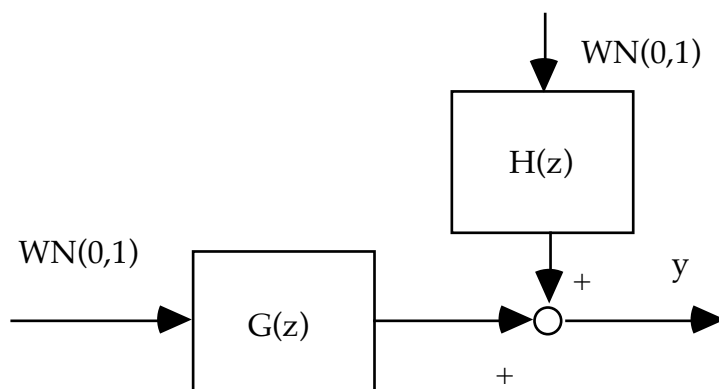
$$A(z)Y(z) = z^{-1}B(z)U(z) + \hat{C}(z) \hat{W}(z), \quad \hat{C}(z) = 1 + 0.1z^{-1}, \quad \hat{w}(\cdot) \sim \text{WGN}(0,100)$$

$$\hat{C}(z) \hat{Y}(z) = [\hat{C}(z) - A(z)]Y(z) + z^{-1}B(z)U(z)$$

$$\hat{y}(t|t-1) + 0.1\hat{y}(t-1|t-2) - 0.8y(t-1) + 2u(t-1) + 10u(t-2)$$

$$\hat{y}(t|t-1) = -0.1\hat{y}(t-1|t-2) - 0.8y(t-1) + 2u(t-1) + 10u(t-2)$$

2. Si consideri il seguente schema a blocchi in cui i rumori bianchi sono tra loro indipendenti:



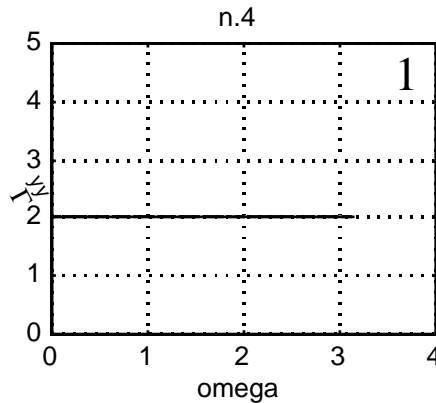
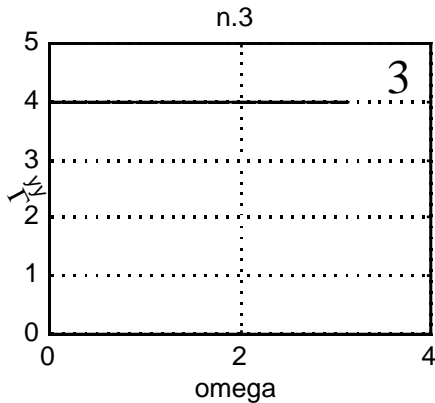
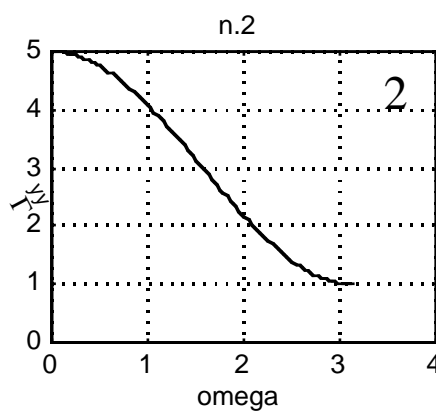
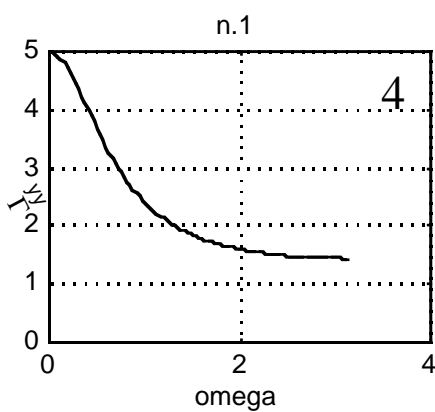
Scrivere sopra ciascuno spettro il numero che identifica i corrispondenti valori delle funzioni di trasferimento $G(z)$ e $H(z)$.

1. $G(z) = \frac{1}{2} \frac{1+2z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$
 $H(z) = 1$

2. $G(z) = 1+z^{-1}$
 $H(z) = 1$

3. $G(z) = 1+z^{-1}$
 $H(z) = 1-z^{-1}$

4. $G(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$
 $H(z) = z^{-1}$



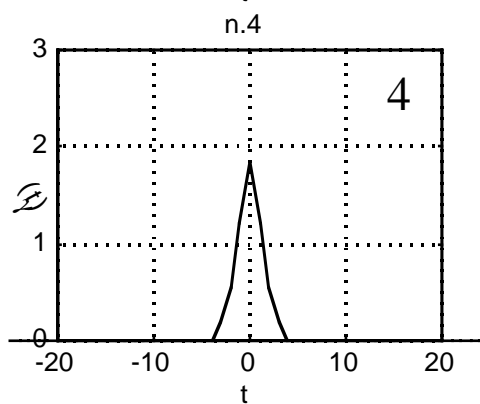
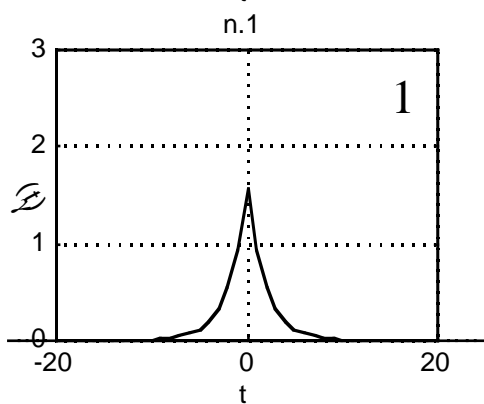
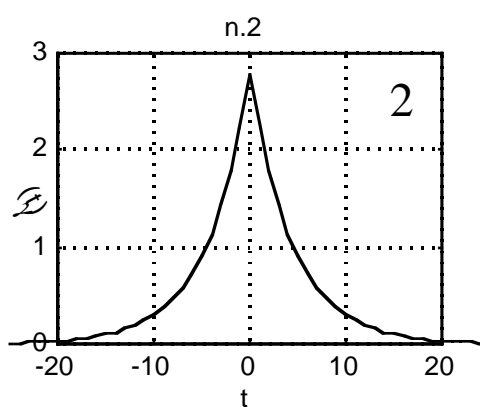
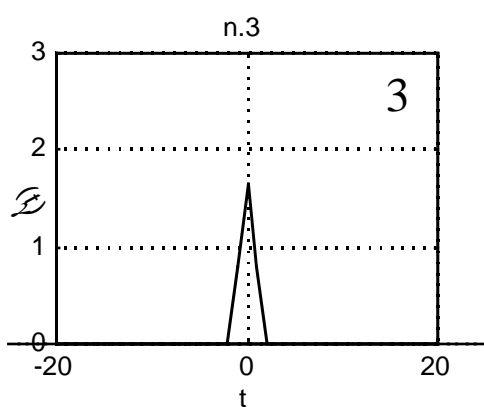
3. Si scriva sopra il grafico delle funzioni di autocovarianza il numero del corrispondente fattore spettrale (in tutti e quattro i casi $\sigma^2 = 1$)

1. $G(z) = \frac{1}{1-0.6z^{-1}}$

2. $G(z) = \frac{1}{1-0.8z^{-1}}$

3. $G(z) = 1+0.8z^{-1}$

4. $G(z) = 1+0.8z^{-1}+0.4z^{-2}+0.2z^{-3}$



4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

- L'algoritmo della backpropagation è esposto a problemi di velocità di convergenza e di minimi locali

- Dato un P.C. stazionario $x(t)$, se $y(t) := \alpha x(t)$, allora $\text{Var}[y(t)] = \alpha^2 \text{Var}[x(t)]$

- Nell'addestramento delle reti neurali, l'errore di stima dipende criticamente dal numero di dati disponibili.

- Nell'addestramento delle reti neurali, l'errore di approssimazione cresce al crescere dell'ordine del modello.

- Se $y(t) := v(t) - v(t-1)$, $v(t) \sim \text{WN}$, allora risulta sempre $\text{Var}[y(t)] = 2\text{Var}[v(t)]$.

- Se $y(t)$ è un P.C. a spettro razionale, non può esistere $\bar{\omega}$ tale che $\Gamma_{yy}(\bar{\omega}) = 0$.

- Il periodogramma è uno stimatore polarizzato e non consistente dello spettro.

- Se $y(t)$ è un P.C. di tipo MA(1) il massimo dello spettro $\Gamma_{yy}(\omega)$ si trova sempre in $\omega=0$ oppure $\omega=\pi$.

- Il predittore ottimo ad un passo $y(t|t-1)$ non può dipendere da $y(t-k)$, con $k \geq 2$.

- L'impulso discreto ($u(0)=1$, $u(t)=0$, $t \neq 0$) è persistentemente eccitante di ordine 1.

1. Date due V.C. V e W congiuntamente gaussiane con $\sigma_V^2 = 2$, $\sigma_W^2 = 1$, $\sigma_{VW} = 1$, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y :

1. $X = V$
 $Y = W$

2. $X = V - W$
 $Y = W$

3. $X = V$
 $Y = -W$

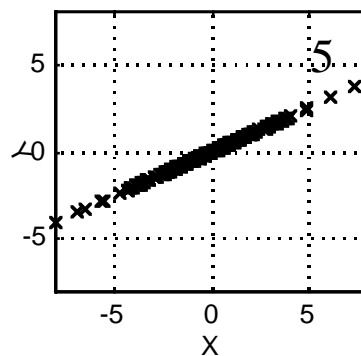
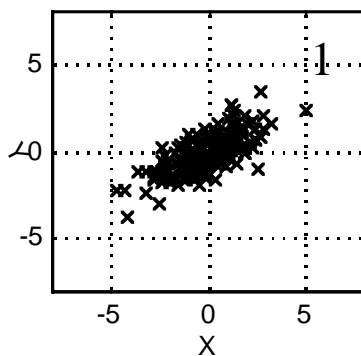
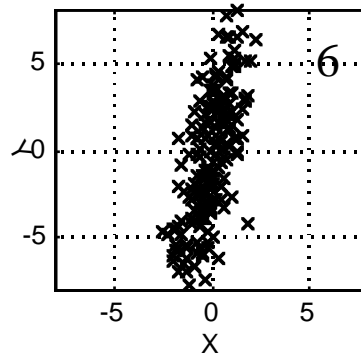
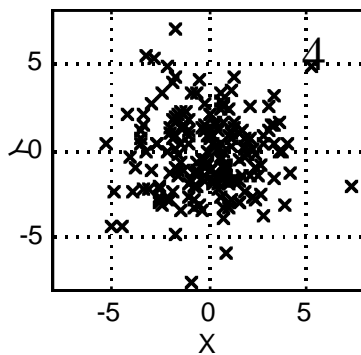
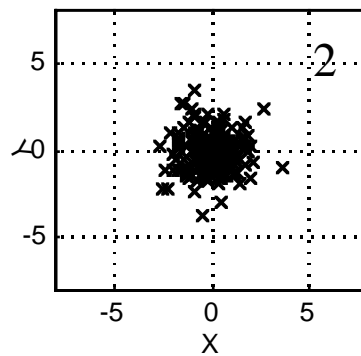
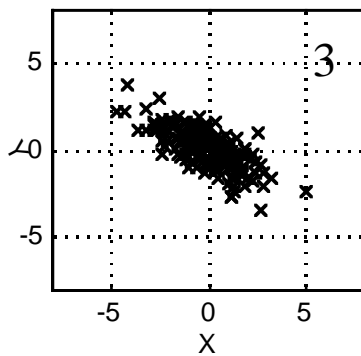
4. $X = 2V - 2W$
 $Y = 2W$

5. $X = V + W$
 $Y = 0.5V + 0.5W$

6. $X = V/\sqrt{2}$
 $Y = 4W$

Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta

Suggerimento: Essendo nota la matrice varianza del vettore $[V \ W]'$, si può procedere al calcolo della matrice varianza del vettore $[X \ Y]'$...



2. Si consideri un segnale $y(t)$ di cui sono disponibili le seguenti misure:

$$y(-2) = 4 \quad y(-1) = 1 \quad y(1) = 0 \quad y(2) = 0$$

Si ipotizza che i dati siano generati dal seguente modello:

$$y(t_k) = \theta_1 t_k + \theta_2 t_k^2 + v_k$$

dove v_k sono errori di misura tra loro indipendenti con $\text{Var}[v_k] = 0.1$.

2.a Calcolare la stima LS di θ .

$$Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} -2 & (-2)^2 \\ -1 & (-1)^2 \\ 1 & 1^2 \\ 2 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\theta^{LS} = (\Phi' \Phi)^{-1} \Phi' Y = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 34 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

2.b Calcolare la matrice varianza dei parametri stimati

$$\sigma^2(\Phi' \Phi)^{-1} = 0.1 \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 34 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.0029 \end{bmatrix}$$

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

- Se due eventi A e B sono disgiunti, allora $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

- Dati tre eventi A, B, C, risulta sempre $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$.

- Si consideri una moneta onesta. La probabilità di ottenere la sequenza TTTT è uguale alla probabilità di ottenere la sequenza TCTC.

- Si considerino degli eventi di Poisson con frequenza media λ . Se in $t = 0$ c'è stato un evento, la probabilità di avere almeno un altro evento di Poisson nell'intervallo $(0, T]$ è pari a $\lambda e^{-\lambda T}$.

- Data una V.C. X scalare ed una funzione $g(\cdot)$, risulta sempre $E[g(X)] = g(E[X])$.

- Siano V e W due V.C. indipendenti. Se $X = aV+bW$, $Y=cV+dW$, allora X e Y sono sempre indipendenti.

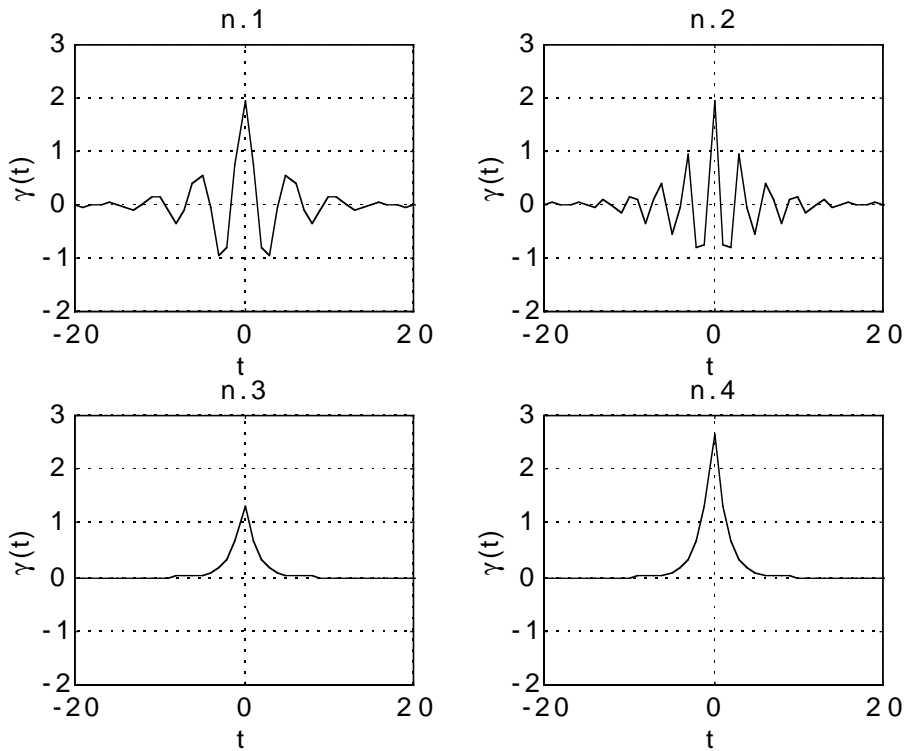
- Sia M il numero di teste ottenuto lanciando N volte una moneta onesta. Allora, per la Legge dei Grandi Numeri, M converge in media quadratica a $N/2$. (Suggerimento: valutare valor medio e varianza di M che è una V.C. binomiale)

- Si indichi con S^2 la varianza campionaria (non corretta) delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$ $E[X_i] = m$, $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$. Allora, S^2 è uno stimatore asintoticamente non polarizzato di σ^2 . Inoltre, è consistente.

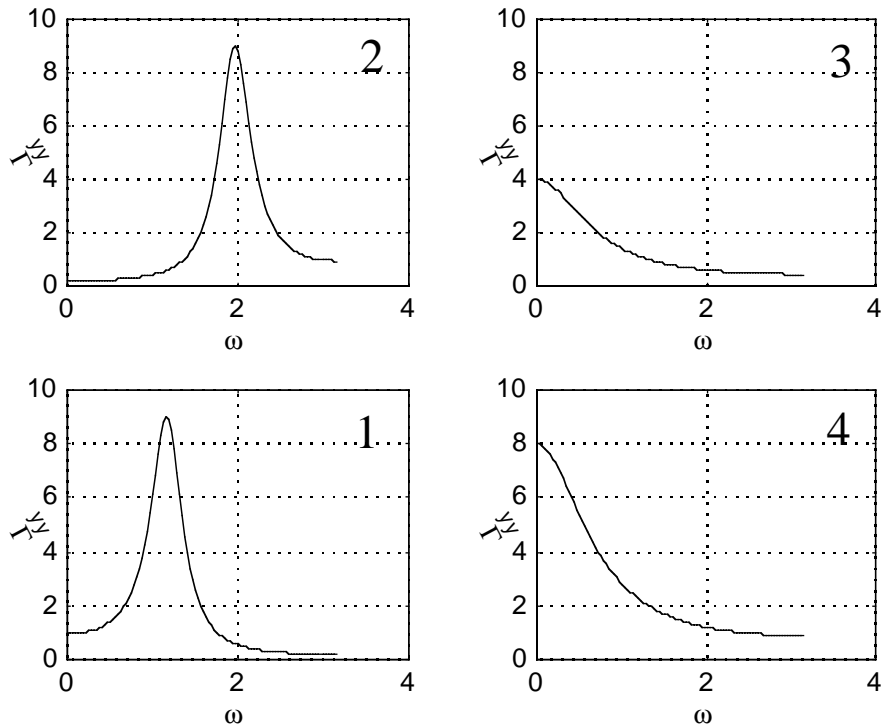
- Si consideri il modello $Y=\Phi\theta+V$. Allora, se $\text{rango}(\Phi)=q$, dove q è la dimensione del vettore θ , lo stimatore ai minimi quadrati è dato da $\theta^{LS} = (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'Y$.

- Tra due modelli gerarchici conviene sempre scegliere quello a cui corrisponde la minima somma dei quadrati dei residui relativa ai dati di identificazione.

1. Nei seguenti grafici sono riportate le funzioni di autocovarianza di 4 P.C. stazionari



Scrivere sopra il grafico dello spettro il numero della corrispondente funzione di autocovarianza



2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

- Se un processo casuale stazionario è ergodico allora, per $N \rightarrow \infty$, $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t)^2$ converge in probabilità a $E[y(t)^2]$.

- Si supponga di stimare lo spettro di un P.C. stazionario mediante la media di periodogrammi. Se si aumenta il numero di finestre (riducendone pertanto la lunghezza), la polarizzazione della stima aumenta e la varianza diminuisce.

- Se $y(t)$ è un processo MA(n) risulta sempre $\gamma_{yy}(\tau) = 0, \tau > n$.

- Per il processo casuale $y(t) = w(t) + w(t-1)$, $w(t) \sim WN(0,1)$, non è possibile calcolare il predittore ottimo ad un passo.

- Il processo casuale $y(t) = w(t) + w(t-1)$, $w(t) \sim WN(0,1)$, è persistentemente eccitante di ogni ordine.

1. Date due V.C. X e Y indipendenti ed entrambe distribuite in modo uniforme in $[0,1]$, si considerino le seguenti definizioni di W :

1. $W = 3X + 3Y$

2. $W = X + 5Y$

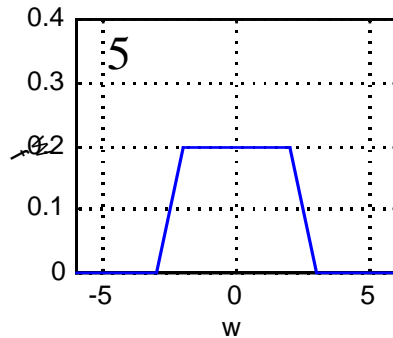
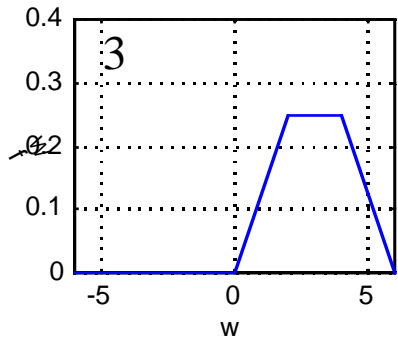
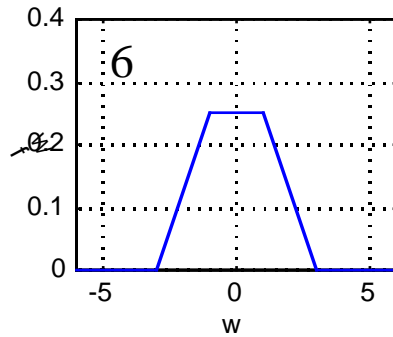
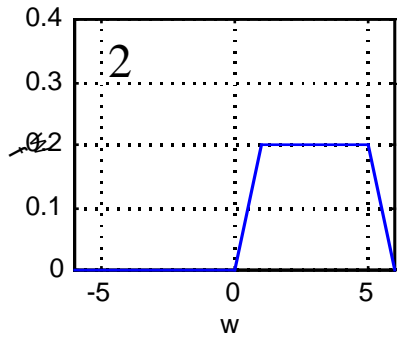
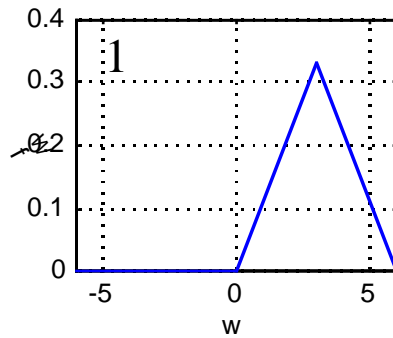
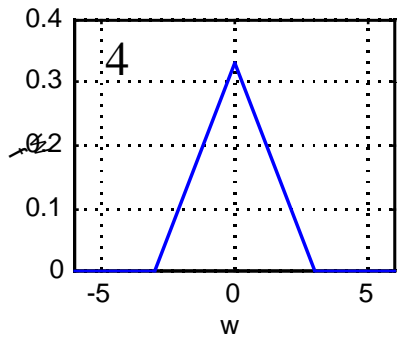
3. $W = 2X + 4Y$

4. $W = 3X - 3Y$

5. $W = X + 5Y - 3$

6. $W = 2X + 4Y - 3$

Scrivere sopra i grafici delle ddp il numero della scelta corretta



2. La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$, $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$, è risultata essere uguale a 10.

Si considerino le seguenti alternative per i valori di N e σ^2 :

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. $N = 36$
$\sigma^2 = 1$ | 2. $N = 100$
$\sigma^2 = 1$ | 3. $N = 36$
$\sigma^2 = 4$ |
| 4. $N = 100$
$\sigma^2 = 4$ | 5. $N = 36$
$\sigma^2 = 9$ | 6. $N = 100$
$\sigma^2 = 9$ |

Scrivere nei riquadri accanto agli intervalli di confidenza per la media il numero della scelta corretta

[9.8040,10.196]

[9.4120,10.588]

[9.3467,10.653]

[9.6733,10.327]

[9.6080,10.392]

[9.0200,10.980]

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

- Risulta sempre $P(A+B) \leq P(A)+P(B)$.

- Lanciando due dadi, la probabilità di ottenere almeno un "6" è pari a $1/3$.

- Si considerino delle prove di Bernoulli con $p=q=1/2$; allora, la probabilità di ottenere n successi su n prove è uguale alla probabilità di ottenere 0 successi su n prove.

- La ddp di una V.C. discreta consiste sempre di una sequenza di delta di Dirac.

- Se $Y = aX+b$, allora $E[Y^2] = E[X^2]$.

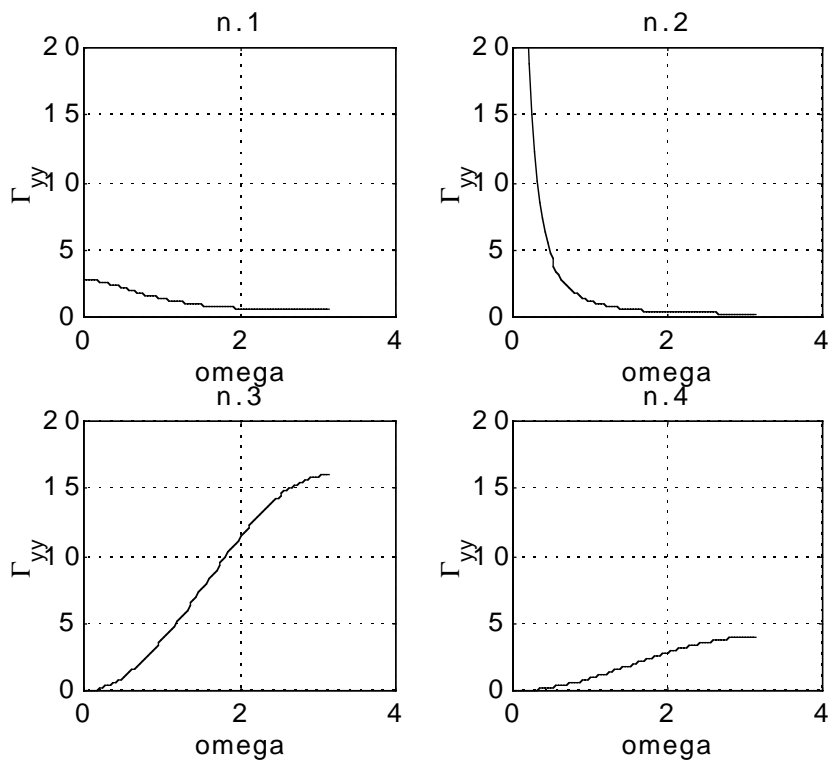
- In virtù del Teorema del Limite Centrale, la V.C. binomiale (che può essere vista come somma di n V.C. di Bernoulli, indipendenti), al crescere di n , ha una funzione di distribuzione che sia lascia sempre meglio descrivere da una funzione di distribuzione gaussiana.

- Si indichi con S^2 la varianza campionaria (non corretta) delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$ $E[X_i] = m$, $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$. Allora, S^2 , pur essendo polarizzato, è uno stimatore consistente di σ^2 .

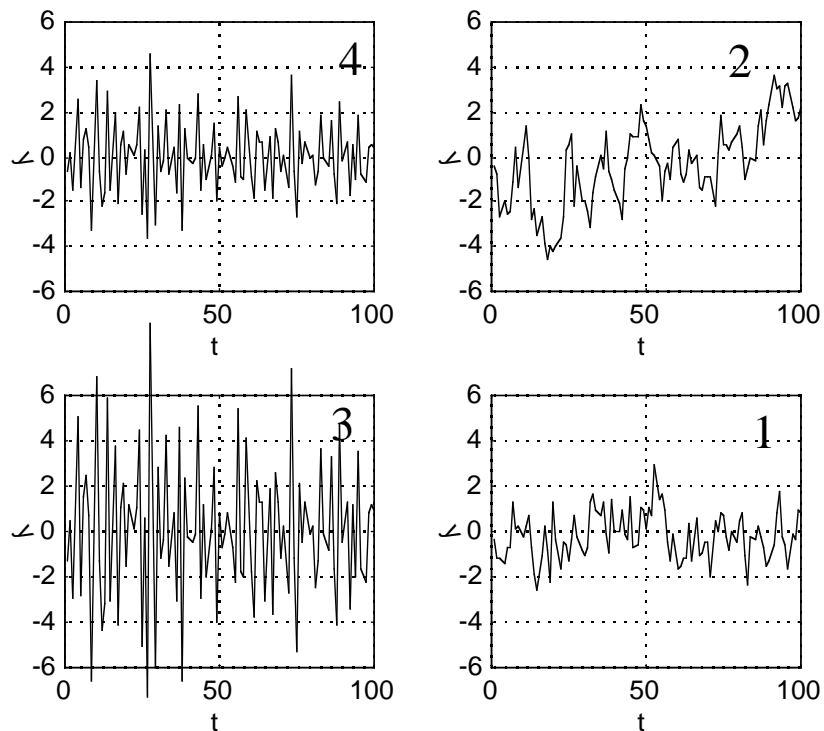
- Si consideri il modello $Y = \Phi\theta + V$. Allora, la matrice varianza di θ^{LS} dipende solo da $\text{Var}[V]$ e non da Φ .

- Data una successione di modelli gerarchici la somma dei quadrati dei residui relativa ai dati di identificazione non cresce mai al crescere del numero di parametri del modello.

1. Nei seguenti grafici sono riportate le densità spettrali di potenza di 4 P.C. stazionari



Scrivere sopra il grafico della realizzazione il numero della corrispondente densità spettrale di potenza.



2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

- Il processo casuale $y(t+1)=y(t)+w(t)$, $y(0)=0$, $w(t)\sim WN(0,1)$, non è stazionario nemmeno in senso lato.

- Dato un P.C. stazionario a spettro razionale, la sua densità spettrale di potenza $\Phi_{yy}(z)$ è la trasformata Zeta del fattore spettrale canonico..

- Se $y(t)$ è un processo stazionario di tipo AR(1) la sua autocovarianza non può mai assumere valori negativi.

- L'autocovarianza della somma di due processi casuali è sempre uguale alla somma delle autocovarianze dei due processi.

- Se $Y(z)=T(z)X(z)$, dove $T(z)$ è un filtro passatutto ($T(z)=\alpha(z+1/\alpha)/(z+\alpha)$), allora i due P.C. $x(t)$ e $y(t)$ hanno sempre lo stesso spettro.

1. Data una V.C. X con d.d.p. $f_X(x)$ e un numero reale $a \neq 0$, si definisca $Y = aX$.
- 1.a Ricavare l'espressione di $f_Y(y)$ in funzione di $f_X(x)$.

Data una funzione di V.C. $Y = g(X)$, se l'equazione $y = g(x)$ ammette sempre una sola soluzione $x=x(y)$ nell'incognita x , allora risulta

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x(y))}{|g'(x(y))|}$$

Nel nostro caso, $g(x) = ax$, cosicché $y(x) = y/a$, $g'(x) = a$. Quindi,

$$f_Y(y) = \frac{f_X(y/a)}{|a|}$$

- 1.b Scrivere cosa valgono $E[Y]$ e $\text{Var}[Y]$ in funzione di $E[X]$ e $\text{Var}[X]$.

$$E[Y] = aE[X]$$

$$\text{Var}[Y] = a^2\text{Var}[X]$$

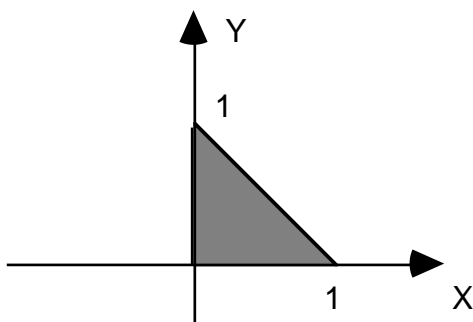
- 1.c Scrivere l'espressione di $f_Y(y)$ quando X è una V.C. esponenziale con $E[X] = 1/\lambda$.

Per una V.C. esponenziale $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $f_X(x) = 0$, $x < 0$. Pertanto,

$$f_Y(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda y/a}}{|a|}, \text{ quando } y/a \geq 0$$

$$f_Y(y) = 0, \text{ altrove}$$

2. Siano X e Y due V.C. che rappresentano le coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile nel triangolo disegnato in figura.



2.a Dire, motivando la risposta se X e Y sono incorrelate.

X e Y sono incorrelate se e solo se $E[XY] = E[X] E[Y]$. Per verificarlo, si calcolano $E[X]$, $E[Y]$, $E[XY]$. Per definizione di momento del primo ordine di una coppia di V.C.,

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x,y) dy dx$$

Dato che lo spazio degli esiti è equiprobabile, nel triangolo $f_{XY}(x,y) = 1/(\text{Area Triangolo}) = 2$, mentre $f_{XY}(x,y) = 0$ fuori del triangolo. Dunque,

$$E[X] = 2 \int_0^1 \int_0^{1-x} x dy dx = \dots = 1/3$$

Per ragioni di simmetria, $E[Y] = E[X] = 1/3$. Infine,

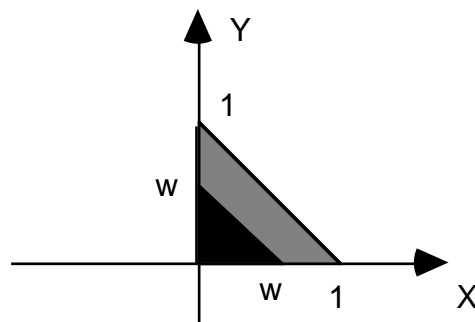
$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y) dy dx = 2 \int_0^1 x \int_0^{1-x} y dy dx = \dots = 1/12$$

dato che $E[XY] \neq E[X] E[Y]$, X ed Y non sono incorrelate.

2.b Dire, motivando la risposta se X e Y sono indipendenti.

Se per assurdo, fossero indipendenti, allora dovrebbero essere anche incorrelate, in contraddizione con il risultato del punto precedente.

2.c Ricavare la d.d.p. della V.C. $W = X + Y$.



$$F_W(w) = P(W \leq w) = P(X+Y \leq w) = \\ = (\text{Area Triangolo piccolo})/(\text{Area Triangolo}) = w^2, 0 \leq w \leq 1$$

$$f_W(w) = \frac{dF_W(w)}{dw} = 2w, 0 \leq w \leq 1$$

$$f_W(w) = \frac{dF_W(w)}{dw} = 0, \text{ altrove}$$

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

- Si considerino delle prove di Bernoulli con probabilità di successo $p = 0.5$; allora la probabilità di ottenere almeno un successo su 4 prove è maggiore di 0.96.

- Se X è una V.C. gaussiana, allora $Y = \log(X)$ è una V.C. distribuita in modo lognormale.

- Si consideri una V.C. X ; $\text{Var}[X] = 0$ implica $E[X^2] = 0$.

- Essendo X e Y due V.C. congiunte, si definiscano $V = 5+X$, $W = 6+Y$; allora, $\text{Cov}[V,W] = \text{Cov}[X,Y]$.

- Date due V.C. congiunte X e Y , $E[X^2+Y] = E[X^2]+E[Y]$.

- Se le V.C. congiunte X e Y sono indipendenti, allora $E[X^2Y] = E[X^2]E[Y]$.

- Se $Y = \Phi\theta+V$, con $E[V] = 0$, e $\text{Var}[V] = \sigma^2I$, allora la stima BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) di θ non dipende da σ^2 .

- Si consideri il modello $y_k = \theta x_k + v_k$, $k=1, \dots, N$, dove x_k sono noti e v_k sono errori di misura. Allora $\theta^{LS} = \frac{\sum_{k=1}^N y_k x_k}{\sum_{k=1}^N x_k^2}$.

- Nella stima BLUE, quando $\text{Var}[V] = \sigma^2I$, una stima non polarizzata di σ^2 è data da $SSR/(N-q)$, dove q è il numero di parametri del modello.

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$ $E[X_i] = m$, $\text{Var}[X_i] = 1$. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [M_1 - 1.96\sqrt{N}, M_1 + 1.96\sqrt{N}]$.

1. Sia

$$y(t) = a_2 y(t-2) + w(t) , \quad w(\cdot) \sim \text{WGN}(0,1)$$

1.a Si dica per quali valori di a_2 il modello rappresenta un processo $y(\cdot)$ stazionario.
Si tratta di un processo AR(2), la cui funzione di trasferimento è

$$G(z) = \frac{1}{1 - a_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - a_2}$$

Il modello corrisponde ad un processo stazionario se le radici del denominatore (i poli) hanno modulo minore di uno, cioè se $|a_2| < 1$.

1.b Si calcolino: $\gamma_{yy}(0), \gamma_{yy}(1), \gamma_{yy}(2)$.

A partire dal modello si ottengono le seguenti relazioni (ipotizzo $|a_2| < 1$).

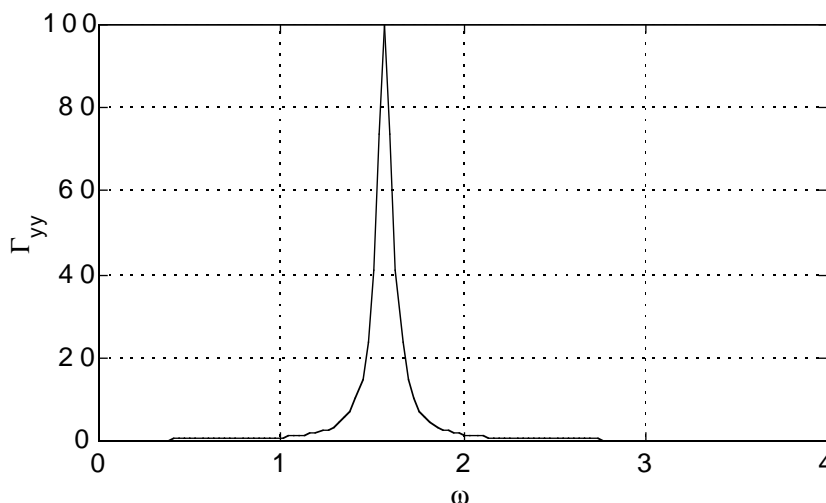
$$\text{Var}[y(t)] = a_2^2 \text{Var}[y(t-2)] + \text{Var}[w(t)] \Rightarrow \text{Var}[y(t)] = \frac{1}{1 - a_2^2}$$

$$\gamma_{yy}(1) = \text{Cov}[y(t), y(t-1)] = \text{Cov}[a_2 y(t-2) + w(t), y(t-1)] = a_2 \gamma_{yy}(1) \Rightarrow \gamma_{yy}(1) = 0$$

$$\gamma_{yy}(2) = \text{Cov}[y(t), y(t-2)] = \text{Cov}[a_2 y(t-2) + w(t), y(t-2)] = a_2 \text{Var}[y(t-2)] \Rightarrow \gamma_{yy}(2) = \frac{a_2}{1 - a_2^2}$$

1.c In corrispondenza di $a_2 = -0.9$. Si tracci l'andamento qualitativo dello spettro del processo $y(\cdot)$.

Per $a_2 = -0.9$, si hanno due poli immaginari puri in $\pm j\sqrt{0.9}$ a cui corrispondono due picchi nello spettro posizionati in $\omega = \pm\pi/2$.



2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

- Un processo MA è stazionario se e solo se la sua funzione di trasferimento ha tutti gli zeri strettamente interni al cerchio di raggio unitario.

- La densità spettrale di potenza $\Phi_{yy}(z)$ di un P.C. stazionario a spettro razionale $y(t)$ è sempre un rapporto di polinomi.

- Se $y(t)$ è un processo stazionario di tipo AR(1) con $a_1 > 0$, risulta sempre $\gamma_{yy}(\tau) > 0, \forall \tau$.

- La densità spettrale di potenza della somma di due processi casuali è sempre uguale alla somma delle densità spettrali di potenza dei due processi.

- Lo scalino discreto ($u(t)=0, t<0, u(t)=1, t\geq 0$) è persistentemente eccitante di ordine 1.

1. Sia $Y = \alpha Z + \beta$, dove $Z \sim N(0,1)$. Si considerino le seguenti scelte per i parametri α e β :

1) $\alpha = -1, \quad \beta = -1$

2) $\alpha = 1, \quad \beta = 1$

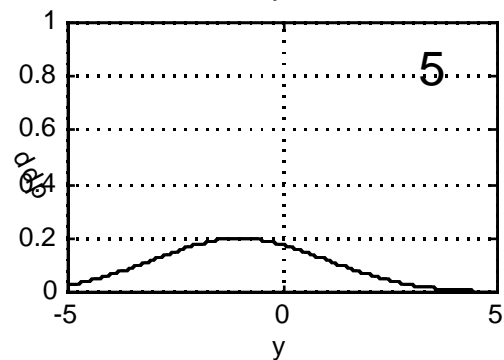
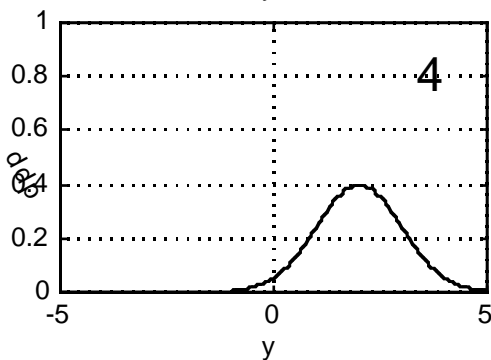
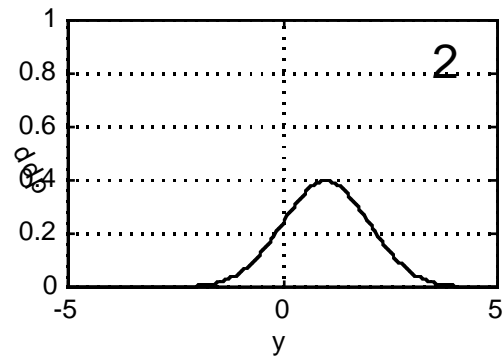
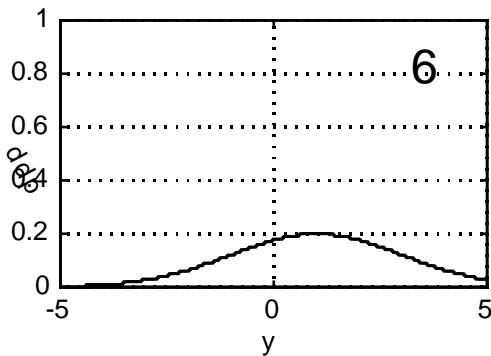
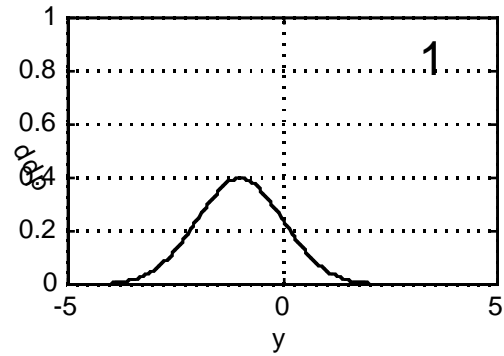
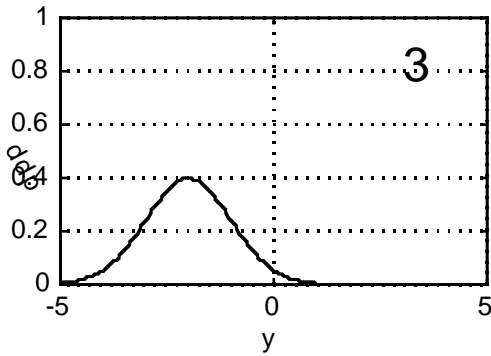
3) $\alpha = -1, \quad \beta = -2$

4) $\alpha = 1, \quad \beta = 2$

5) $\alpha = 2, \quad \beta = -1$

6) $\alpha = -2, \quad \beta = 1$

Riportare sopra i seguenti grafici delle densità di probabilità di Y il numero della corrispondente coppia α, β



2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

- Se $P(B) \neq 0$, risulta sempre $P(AB) = P(A|B)P(A)$.
- Dati due eventi A e B, non può mai accadere che $P(A)P(B) > 1$.
- La probabilità che il tempo di attesa tra due eventi di Poisson sia minore o uguale a T è pari a $1 - \exp(-\lambda T)$.
- Se $\text{Var}[X] = 0$, allora ne segue che $E[X^2] = 0$.
- Se $Z = X + Y$ con $Y = 2X$, allora $f_Z(z) = f_X(z/3)/3$.
- Date delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$, $E[X_i] = m$, $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$, la media campionaria è uno stimatore non polarizzato e consistente di m.
- Date due V.C. congiunte X e Y, la ddp della V.C. $Z = X + Y$ è la convoluzione della ddp di X e della ddp di Y.
- Uno stimatore polarizzato non può essere consistente.
- Sia $Y = \Phi\theta + V$, con $E[V] = 0$, e $\text{Var}[V] = \sigma^2 I$. Allora, $\text{Var}[\theta^{LS}] = \sigma^2 \Phi' \Phi$.
- Se $Y = \Phi\theta + V$, con V distribuito gaussianamente, allora θ^{LS} è gaussiano.

3. Si considerino i seguenti dati:

$$\begin{array}{lll} y_1 = 1, & y_2 = 0, & y_3 = -2 \\ t_1 = -1, & t_2 = 0, & t_3 = 1 \end{array}$$

Vi sono due modelli possibili:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & y_k = \theta + v_k \\ \text{(b)} & y_k = \theta_1 t_k + \theta_2 t_k^2 + v_k \end{array}$$

dove v_k indica un errore di misura. Gli errori di misura sono V.C. i.i.d. ($\text{Var}[V] = \sigma^2 I$).

3.a Supponendo che il modello (a) sia quello giusto calcolare la stima LS di θ .

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta^{LS} = (\Phi' \Phi)^{-1} \Phi' Y = -1/3$$

3.b Supponendo che il modello (b) sia quello giusto, calcolare la stima LS di θ .

$$\Phi = \begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 \\ t_2 & t_2^2 \\ t_3 & t_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix},$$
$$\theta^{LS} = (\Phi' \Phi)^{-1} \Phi' Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

3.c Dire, motivando la risposta, se si può usare il criterio $FPE = SSR(N+q)/(N-q)$ per scegliere il modello migliore. In caso affermativo, trovare il modello migliore.

Non si può usare FPE perché i due modelli non sono gerarchici (il modello (a) non è un caso particolare di (b)).

1. Sia

$$y(t) = 0.6 y(t-1) + w(t) + 4w(t-1), \quad w(\cdot) \sim \text{WGN}(0,1)$$

1.a Dire perché $y(t)$ converge ad un processo stazionario e determinare il valore atteso di tale processo.

$$G(z) = \frac{1 + 4z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}} = \frac{z + 4}{z - 0.6}$$

Dato che il polo in $z = 0.6$ ha modulo < 1 , allora $y(t)$ converge ad un processo stazionario.

$$E[y(t)] = G(1) E[w(t)] = 12.5 \times 0 = 0$$

1.b Ricavare il predittore ottimo ad un passo.

$G(z)$ non è canonica.

$$T(z) = 4 \frac{z + 1/4}{z + 4}, \quad G(z)T(z) = 4 \frac{z + 1/4}{z - 0.6}, \quad \text{non canonico}$$

$$\hat{G}(z) = \frac{z + 1/4}{z - 0.6} = \frac{C(z)}{A(z)}, \quad \hat{\sigma}^2 = 16$$

$$C(z) \hat{Y}(z) = [C(z) - A(z)]Y(z)$$

$$\hat{y}(t | t-1) + 0.25\hat{y}(t-1 | t-2) = 0.85y(t-1)$$

$$\hat{y}(t | t-1) = -0.25\hat{y}(t-1 | t-2) + 0.85y(t-1)$$

1.c Ricavare il valore atteso del processo stazionario $y(t)$ nel caso in cui $w(\cdot) \sim \text{WGN}(1,1)$.

$$E[y(t)] = G(1) E[w(t)] = 12.5 \times 1 = 12.5$$

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

- In una rete neurale di tipo MLP(Multi Layer Perceptron) il numero dei parametri da stimare coincide con il numero di neuroni.

- Dato un P.C. stazionario $x(t)$, se $y(t) := x(t)+x(t-1)$, allora risulta sempre $\text{Var}[y(t)]=2\text{Var}[x(t)]$

- Se $y(t) :=v(t)+v(t-1)$, $v(t)\sim\text{WN}$, allora risulta sempre $\text{Var}[y(t)] = 2\text{Var}[v(t)]$.

- Il periodogramma è uno stimatore asintoticamente non polarizzato.

- Un rumore bianco è persistentemente eccitante di qualsiasi ordine.

1. Si consideri una roulette senza lo zero. Un giocatore possiede 7 fiches ed adotta la seguente strategia. Punta una fiche sul rosso e, se vince, si ritira con una vincita V pari ad uno. Se invece esce il nero, al lancio successivo punta due fiches sul rosso. Se esce il rosso si ritira, altrimenti punta le sue ultime 4 fiches sul rosso. Con V indichiamo il guadagno del giocatore quando esce dal casinò (si noti che vi sono solo due possibilità: $V=1$ oppure $V=-7$). Ricavare $E[V]$.

$$P(V = -7) = P(N,N,N) = P(N)^3 = 0.5^3 = 1/8$$

$$P(V = 1) = 1 - P(V = -7) = 7/8$$

Dato che V è una V.C. discreta:

$$E[V] = -7 \times P(V = -7) + 1 \times P(V = 1) = -7/8 + 7/8 = 0$$

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	F
• La probabilità che, lanciando n volte una moneta onesta, esca Testa una sola volta è pari a $n(1/2)^n$.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Dato un dado onesto, si considerino gli eventi $A=\{\text{dado} \geq 2\}$, $B=\{\text{dado pari}\}$. Allora, A e B sono indipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
• Si consideri la media campionaria di N V.C. i.i.d.. Allora, se quadruplico N , la varianza della media campionaria si dimezza.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
• Date X e Y congiuntamente gaussiane e i.i.d., si definiscano $V=X+Y$, $W=X-Y$. Allora, V e W sono tra di loro indipendenti.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Sia $Y = \Phi\theta + V$, con $E[V] = 0$, e $\text{Var}[V] = \sigma^2 I$. Allora, θ^{LS} non dipende da σ^2 .	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1. Si consideri l'identificazione del modello

$$y(t) = ay(t-1) + w(t), \quad w(\cdot) \sim \text{WGN}(0, \sigma^2)$$

a partire dai dati $y(1), y(2), \dots, y(N)$.

Ricavare l'espressione della stima ai minimi quadrati di a .

Ponendo $\theta = a$, risulta $Y = \Phi\theta + W$, dove

$$Y = [y(2) \ y(3) \ \dots \ y(N)]'$$

$$W = [w(2) \ w(3) \ \dots \ w(N)]'$$

$$\Phi = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(N-1)]'$$

Ricordando che $\theta^{LS} = (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'Y$, si ottiene

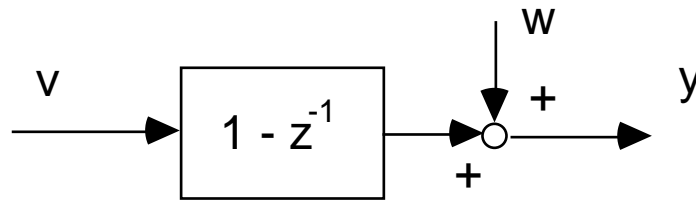
$$\theta^{LS} = \frac{\sum_{t=2}^N y(t)y(t-1)}{\sum_{t=1}^{N-1} y(t)^2}$$

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

- | | V | F |
|---|-------------------------------------|--------------------------|
| • Se $\text{Cov}[y(t), y(t+L)] \neq \text{Cov}[y(t-L), y(t)]$, allora y non può essere un P.C. stazionario. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| • Dato un P.C. stazionario $x(t)$, se $y(t) := x(t-k)$, allora x ed y hanno lo stesso spettro. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| • La densità spettrale di potenza $\Gamma_{yy}(\omega)$ di un P.C. stazionario di tipo AR non può mai annullarsi. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| • Due P.C. stazionari hanno lo stesso fattore spettrale canonico se e solo se hanno la stessa funzione di autocovarianza. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| • Il problema dell'identificazione dei parametri di un modello ARMAX comporta un problema di stima non lineare nei parametri. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

1. Si consideri il seguente schema a blocchi in cui $v \sim WN(0,1)$, $w \sim WN(0,1)$, con v e w indipendenti tra di loro.



- 1.a Calcolare $\Gamma_{yy}(\omega)$.

$$\Phi_{yy}(z) = (1 - z^{-1})(1 - z) + 1 = 3 - z - z^{-1}$$

$$\Gamma_{yy}(\omega) = \Phi_{yy}(e^{j\omega}) = 3 - e^{j\omega} - e^{-j\omega} = 3 - 2\cos \omega$$

- 1.b Calcolare $\text{Var}[y(t)]$.

$$X(z) := (1 - z^{-1})V(z)$$

$$\text{Var}[y(t)] = \text{Var}[x(t)] + \text{Var}[w(t)] = 2 + 1 = 3$$

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	F
• Sia $w \sim WN(0,1)$; allora $y(t) = \sin(t) w(t)$ non è un P.C. stazionario.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Dato un P.C. stazionario $u(t)$, si consideri $y(t) = g_0 u(t) + g_1 u(t-1) + \dots + g_n u(t-n)$. Allora, $E[y(t)] = (g_0 + g_1 + \dots + g_n)E[u(t)]$.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Sia $y(t) = a_2 y(t-2) + w(t)$, $ a_2 < 1$, $w \sim WN(0,1)$. Allora, $y(t t-1) = a_2 y(t-2)$.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Dato un processo stazionario di tipo AR(1), risulta $\lim_{N \rightarrow \infty} a_1^{LS} = \gamma_{yy}(0) / \gamma_{yy}(1)$.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
• Dato un P.C. stazionario $x(t)$, si consideri $y(t) = x(t) - x(t-1)$. Allora, $\gamma_{yy}(\tau) = 0, \forall \tau$.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>