

# Esercizi di Teoria dei Sistemi

L. Magni

## 1 Esercizio

Il modello (parziale) di un reattore per la polimerizzazione è descritto dalle seguenti equazioni, dove, in variabili adimensionali,  $x_1$  è la concentrazione del monomero e  $x_2$  è la concentrazione dell'iniziatore e  $u$  è la portata volumetrica dell'iniziatore.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 10(6 - x_1(t)) - 2x_1(t)\sqrt{x_2(t)} \\ \dot{x}_2(t) = 80u(t) - 10x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

1. si determini lo stato di equilibrio che corrisponde all'ingresso costante  $\bar{u} = 0.125$ ;
2. si determini il sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio trovato;
3. si studi la stabilità dell'equilibrio
4. si calcoli la funzione di trasferimento del sistema linearizzato

## 2 Esercizio

Si consideri il sistema rappresentato in Figura 1, consistente in un pistone di massa  $M = 10Kg$ , tenuto in levitazione elettromagnetica tramite un circuito elettrico che alimenta una elettrocalamita. Il pistone è soggetto alla forza di gravità e alla forza  $F = i^2/y$ , dove  $i$  è la corrente del circuito elettrico e  $y$  la distanza del pistone dalla elettrocalamita. Siano  $L = 0.01H$  la induttanza totale e  $R = 4\Omega$  la resistenza del circuito

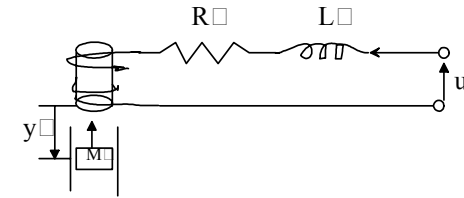


Figure 1:

1. Si rappresenti il sistema in termini di equazioni di stato
2. Si ricavi l'ingresso  $u$  necessario per mantenere il pistone in uno stato di equilibrio corrispondente alla posizione  $y = 0.5m$
3. Linearizzando il sistema attorno ai punti di equilibrio trovati si discuta la natura di tali punti di equilibrio

## 3 Esercizio

Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_1^3 - x_1x_2^2 - x_2 \end{cases}$$

- a) Si determinino gli stati di equilibrio
- b) Si studi la stabilità di ciascun stato di equilibrio

## 4 Esercizio

Il modello di un mulino per la produzione di cemento è descritto dalle seguenti equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 0.8\varphi(x_2) \\ \dot{x}_2 = -0.8\varphi(x_2) + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

in cui  $\varphi(x_2) = -0.1x_2^2 + 16x_2$ .

- a) Determinare il punto di equilibrio per cui risulta  $\bar{x}_2 = 100$ .
- b) Linearizzare il sistema attorno a tale punto di equilibrio trovando le equazioni del sistema in variabili di stato.
- c) Studiare la stabilità del punto di equilibrio trovato.
- d) Ricavare la funzione di trasferimento.
- e) Supponendo che l'ingresso  $u$  sia dato da  $u = Ky$ , studiare la stabilità del sistema linearizzato così ottenuto, al variare di  $K$ .

## 5 Esercizio

Si studi la stabilità del seguente sistema mediante l'equazione di Lyapunov e mediante il metodo degli autovalori

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

## 6 Esercizio

Si studi la stabilità del seguente sistema mediante la funzione di Lyapunov e mediante il metodo degli autovalori

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

## 7 Esercizio

Si enunci il criterio di Lyapunov per la stabilità dei sistemi continui e lo si applichi al sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

per studiarne la stabilità.

Si verifichi il risultato con il metodo degli autovalori.

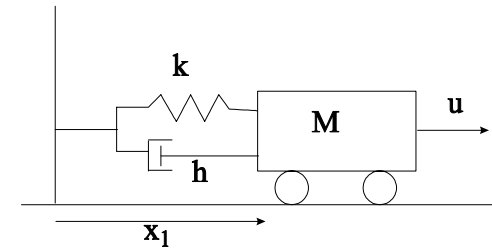


Figure 2:

## 8 Esercizio

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

Utilizzando una funzione di Lyapunov si studi la stabilità del sistema. Si controlli il risultato ottenuto con il metodo degli autovalori.

## 9 Esercizio

Si consideri il sistema riportato in Figura 2 con  $M = k = 1, u = 0$ .

1. Si studi la stabilità del sistema al variare di  $h > 0$  mediante una funzione di Lyapunov.
2. Si dica per quali valori di  $h > 0$  il sistema è oscillante.

## 10 Esercizio

Applicando la **definizione** di stabilità di Lyapunov si dimostri che il sistema

$$\dot{x} = ax$$

è:

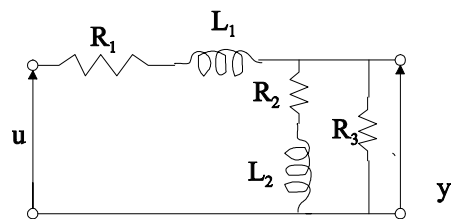


Figure 3:

1. asintoticamente stabile se a ....
2. semplicemente stabile se a ....
3. instabile se a .....

## 11 Esercizio

Un serbatoio d'acqua è alimentato da un canale fluviale tramite l'apertura istantanea di una saracinesca in grado di riversare  $1 \text{ m}^3$  di acqua/ora nel serbatoio. Il serbatoio ha una sezione di  $2 \text{ m}^2$  ed è alto 5 m, ed ha una perdita d'acqua in volume, proporzionale al livello presente nel serbatoio stesso secondo un coefficiente  $K_1 = 0.2 \text{ m}^2/\text{ora}$

1. Si determini se partendo con serbatoio vuoto e con la saracinesca aperta il serbatoio trabocca.
2. Si determinino il valore minimo e il valore massimo del livello dell'acqua a regime aprendo e chiudendo la saracinesca alternativamente ogni ora.

## 12 Esercizio

Si consideri il circuito riportato in Figura 3 con  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 3\Omega$ ,  $R_3 = 1\Omega$ ,  $L_1 = 0.2H$ ,  $L_2 = 0.5H$

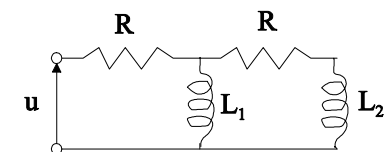


Figure 4:

1. Si descriva il sistema in termini di equazioni di stato e trasformazione d'uscita
2. Si verifichi la raggiungibilità dello stato del sistema
3. Eseguendo una retroazione sullo stato del sistema (i.e.  $u = Kx + v$ ) si faccia in modo che gli autovalori del sistema siano  $\lambda_1 = -10$ ,  $\lambda_2 = -3$
4. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema retroazionato.
5. Si determini l'uscita a regime per  $u(t) = 100sca(t)$

## 13 Esercizio

Si consideri il circuito riportato in Figura 4 con  $R = 3\Omega$ ,  $L_1 = 1H$ ,  $L_2 = 0.5H$ .

1. Si descriva il circuito in termini di relazioni ingresso-stato
2. Si ricavi la risposta impulsiva dello stato a meno dei coefficienti.
3. Si calcoli lo stato **a regime** per un ingresso

$$u(t) = [10sen(2t) + 2sca(t)]$$

## 14 Esercizio

Si consideri il circuito riportato in Figura 5 con  $R_3 = 2\Omega$ ,  $L_1 = 0.5H$ ,  $L_2 = 0.4H$ .

1. Si descriva il circuito in termini di relazioni ingresso-stato e stato-uscita

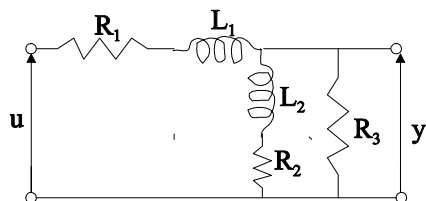


Figure 5:

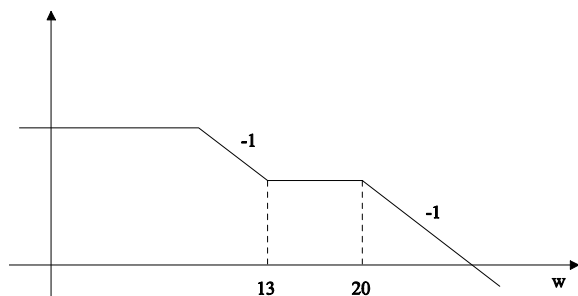


Figure 6:

2. Si verifichi la raggiungibilità del sistema
3. Del circuito è stato rilevato il seguente diagramma cartesiano della risposta in frequenza.riportato in Figura 6 Si determinino i valori di  $R_1$ , di  $R_2$ , il guadagno statico, la posizione del polo a frequenza più bassa e si calcolino la funzione di trasferimento
4. Si calcoli l'uscita per
 
$$u(t) = 3sca(t)$$
 e stato iniziale nullo.
5. Eseguendo una retroazione sullo stato si faccia in modo che il sistema si comporti come un oscillatore lineare con pulsazioni  $\omega = 1rad/sec$ .

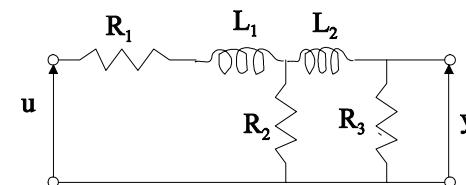


Figure 7:

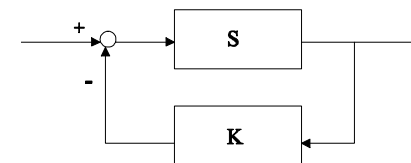


Figure 8:

## 15 Esercizio

Si consideri il sistema (S) rappresentato dal circuito elettrico riportato in Figura 7 con  $R_1 = 3$ ,  $R_2 = 2$ ,  $R_3 = 5.2$ ,  $L_1 = 0.5H$ ,  $L_2 = 0.4H$

- a) Si descriva il sistema in termini di equazioni di stato.
- b) Si verifichi la raggiungibilità dello stato.
- c) Si calcoli la risposta impulsiva del sistema e se ne rappresenti graficamente l'andamento qualitativo in funzione del tempo.
- d) Si supponga di retroazionare il sistema (S) come in figura 8 dove  $K$  è un numero reale:
  - d.1) Se ne studi la stabilità al variare di  $K$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ .
  - d.2) Per quali valori di  $K$  il sistema in anello chiuso non presenta oscillazioni?

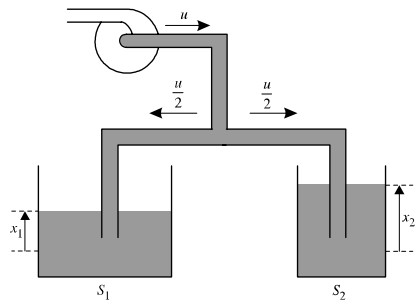


Figure 9:

- d.3) Qual è il valore di  $K$  per cui lo smorzamento del sistema retroazionato è  $\xi = 0.5$  e qual'è la pulsazione naturale  $\omega_n$  per tale valore di  $K$ ?
- d.4) Per quale valore di  $K$  la risposta impulsiva del sistema in anello chiuso presenta oscillazioni con periodo  $T = 6.28$  sec? Qual è il valore di  $\xi$  corrispondente?

## 16 Esercizio

I due serbatoi riportati in Figura 9 sono cilindrici con area di base  $S_1$  e  $S_2$ . Essi sono alimentati da un'unica pompa la cui portata volumetrica  $u$  si suddivide in parti uguali tra loro. La variabile di uscita  $y$  è il volume totale di fluido presente nei serbatoi al di sopra della quota assunta come zero nella misurazione dei livelli  $x_1$  e  $x_2$ .

1. Si scriva il modello del sistemi in termini di equazioni ingresso-stato stato-uscita.
2. Si enuncino le condizioni necessarie e sufficienti perchè un sistema lineare sia completamente raggiungibile e completamente osservabile.
3. Si studi la raggiungibilità e la osservabilità del sistema considerato.

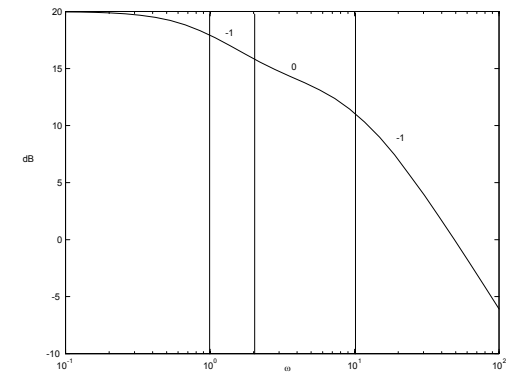


Figure 10:

4. Si calcoli la funzione di trasferimento del modello del sistema (si commenti il grado del denominatore ottenuto)

## 17 Esercizio

Di un sistema regolare, lineare ed invariante, privo di ritardi è stato rilevato il diagramma cartesiano dei moduli della risposta in frequenza riportato in Figura 10

1. Si determini la funzione di trasferimento del sistema sapendo che, per un ingresso a scalino, l'uscita a regime è di segno opposto all'ingresso e che il diagramma degli sfasamenti è monotono decrescente.
2. Si determini la risposta  $y(t)$  per un ingresso  $u(t) = sca(t)$
3. Si rappresenti il sistema in termini di relazioni ingresso-stato e stato-uscita
4. Eseguendo una retroazione sullo stato si faccia in modo che gli autovalori del sistema diventino  $\lambda_1 = -4$  e  $\lambda_2 = -5$ .

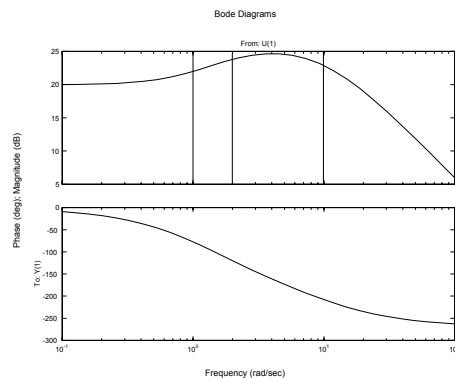


Figure 11:

## 18 Esercizio

Data

$$G(s) = \frac{s + 18}{(s + 3)^2}$$

1. Si calcoli l'uscita per un ingresso

$$u(t) = sca(t) - 2ram(t - 1) + 2ram(t - 2) + sca(t - 3)$$

2. Si calcoli l'uscita per un ingresso  $u(t) = 3sen(5t)$

## 19 Esercizio

Di un sistema  $S$  si conosce il diagramma della risposta in frequenza riportato in Figura 11

1. Si ricavi la funzione di trasferimento del sistema e (usando i diagrammi cartesiani) si calcoli la risposta a regime per

$$u(t) = 2sen(5t)$$

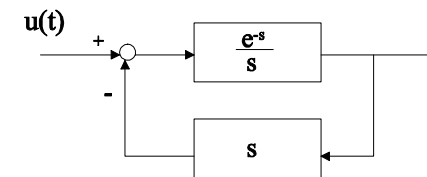


Figure 12:

2. Supponendo di retroazionare, con **retroazione positiva**, il sistema  $S$  con un dispositivo avente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{0.1(s + 10)}{s + a}, \quad a > 0$$

si studi la stabilità del sistema retroazionato, al variare di  $a$  usando il criterio di Routh.

## 20 Esercizio

Si traccino il diagramma polare qualitativo della risposta in frequenza dei sistemi aventi funzione di trasferimento

$$Z(s) = \frac{(s^2 + 9)(s - 1)}{s(s^2 + 1)(s + 1)}$$

$$Z(s) = \frac{(s - 1)(s + 2)}{s^2(s^2 + 9)(s + 1)}$$

$$Z(s) = \frac{(2 - s)}{s^2(s + 1)}$$

## 21 Esercizio

Si consideri il sistema in Figura 12 e si determini l'uscita  $y(t)$  per  $u(t) = imp(t)$

## 22 Esercizio

Dato un integratore, un derivatore ed una lineadi ritardo con ritardo regolabile, si disegni uno schema a blocchi che, per un ingresso impulsivo, fornisca in uscita un'onda quadra con periodo di 3 secondi.

## 23 Esercizio

Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -3x_1 + x_2 + 2u_1 + u_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 4x_2 + 2u_2 \\ y &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

1. Si calcoli la matrice di trasferimento

2. Si determini l'uscita a regime per  $u(t) = \begin{bmatrix} 10\text{sen}(10t) \\ 2\text{sca}(t) \end{bmatrix}$

## 24 Esercizio

Sia data la seguente relazione ingresso-uscita di un sistema  $S$

$$\frac{d^4y}{dt^4} + 3\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} = \frac{d^3u}{dt^3} + 2\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + 2u$$

1. Si determini la funzione di trasferimento di  $S$

2. Si tracci il diagramma polare qualitativo della risposta in frequenza del sistema

## 25 Esercizio

Si dimostri con un esempio circuitale che due sistemi, singolarmente completamente raggiungibili, se messi in parallelo, possono dar luogo ad un sistema risultante non completamente raggiungibile.

## 26 Esercizio

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - 12x_2 + 2u_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 8x_2 + u_1 + u_2 \\ y = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

1. Si verifichi la osservabilità dello stato del sistema

2. Si calcoli l'uscita **a regime** per

$$u(t) = \begin{bmatrix} 10\text{sca}(t) \\ 50\text{sen}(t) \end{bmatrix}$$

## 27 Esercizio

Dato il sistema descritto dalla relazione ingresso-uscita

$$\frac{dy(t)^3}{dt^3} + 4\frac{dy(t)}{dt} = -3\frac{du(t)}{dt} + 6u(t)$$

1. Si studi la stabilità del sistema

2. Si traccino il diagramma polare e il diagramma di Bode della risposta in frequenza

## 28 Esercizio

Si consideri il sistema lineare descritto da

$$Z(s) = \frac{3}{s+2}$$

Supponendo che in ingresso ci sia un treno di impulsi unitari con frequenza 0.5, si determini il valore massimo dell'uscita.

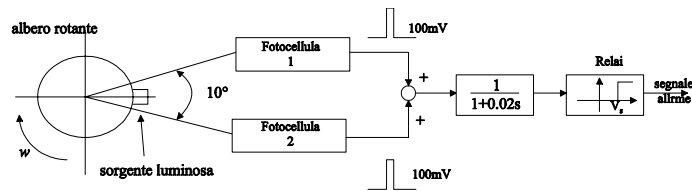


Figure 13:

## 29 Esercizio

Su un albero rotante è sistemato un dispositivo di sicurezza che produce un segnale d'allarme quando la velocità angolare supera un valore preassegnato. Il dispositivo, mostrato in Figura 13, è costituito da una sorgente luminosa montata sull'albero e da due fotocellule fisse e distanziate di un angolo di  $10^\circ$ .

Si supponga, per semplicità, che gli impulsi generati dalle fotocellule siano ideali e che la loro Area ( $100mV$ ) non dipenda dalla velocità di rotazione  $w$ .

Si determini come tarare la tensione di soglia  $V_s$  del relai in modo che si abbia un allarme quando  $w \geq 1$  giro/sec.

## 30 Esercizio

Si consideri il sistema riportato in Figura 14

Supposto  $u(t) = \sin 4t$ , quali lampadine si accendono e per quanto tempo rimangono accese?

## 31 Esercizio

Si tracci il diagramma polare della risposta in frequenza del sistema  $S$ , avente funzione di trasferimento

$$Z(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s(1 + s)}$$

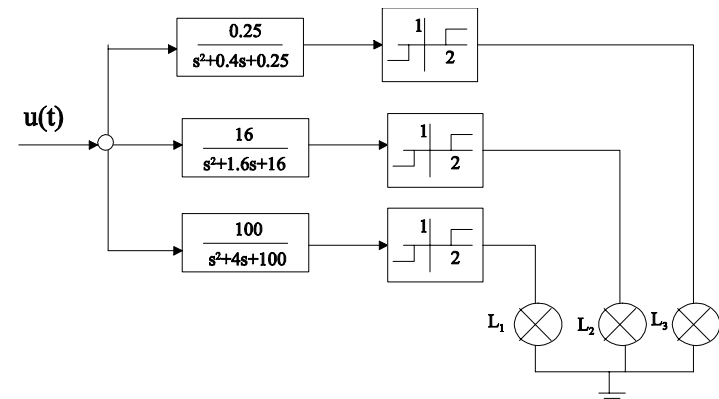


Figure 14:

Si inserisca il sistema  $S$  nel schema riportato in Figura 15 e si determinino  $K$  e  $T$ , sapendo che per  $u(t) = \sin 1.7t$ ,  $y(t) = 0$  a regime.

## 32 Esercizio

Di un sistema lineare, invariante, stabile, con guadagno positivo, senza ritardi, senza zeri con parte reale positiva, è stato rilevato il diagramma cartea-

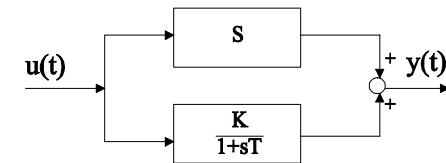


Figure 15:



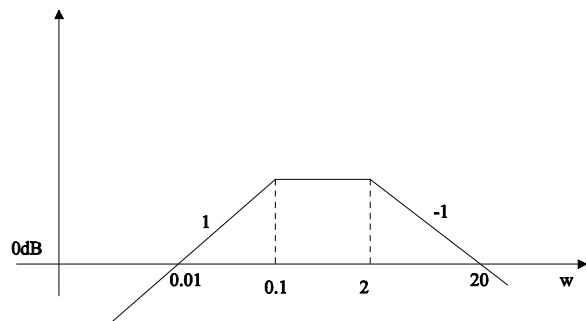


Figure 16:

siano dei moduli della risposta in frequenza riportato in Figura 16

1. Si determini la risposta per  $t > 0$  ad un ingresso  $u(t) = ramp(t) - sca(t - 1) - sca(t - 2)$ ;
2. Si rappresenti il sistema in termini di equazioni ingresso-stato e stato-uscita.
3. Si esegua una retroazione sullo stato in modo che gli autovalori del sistema siano  $\lambda_1 = -0.2$  e  $\lambda_2 = -1$

### 33 Esercizio

Si diano le condizioni affinché la condizione iniziale di un sistema lineare tempo invariante possa essere considerata nulla in quanto non influenza il movimento dell'uscita. Si utilizzi un esempio per illustrare le condizioni introdotte.

### 34 Esercizio

Si determini, motivando brevemente, la corrispondenza fra le risposte allo scalino unitario riportate in Figura 17 e i diagrammi cartesiani riportati in

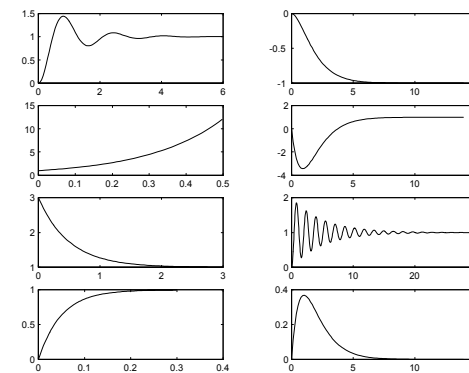


Figure 17:

Figura 18-19

### 35 Esercizio

Si costruisca il diagramma polare qualitativo del sistema avente funzione di trasferimento

$$Z(s) = \frac{(s+1)(s-2)}{s^2(s^2+16)}$$

### 36 Esercizio

Si consideri il sistema riportato in Figura 20 con  $L = 0.5$  m,  $m = 0.1$  Kg, attrito nullo

1. Si descriva il sistema in termini di equazioni di stato
2. Si determinino  $F$  e  $K$  in modo tale che con il filo collegato il sistema sia in equilibrio in posizione  $L$  mentre tagliando il filo con le forbici il carrello passi per lo zero ogni 5 sec. (posizione di equilibrio del sistema autonomo)

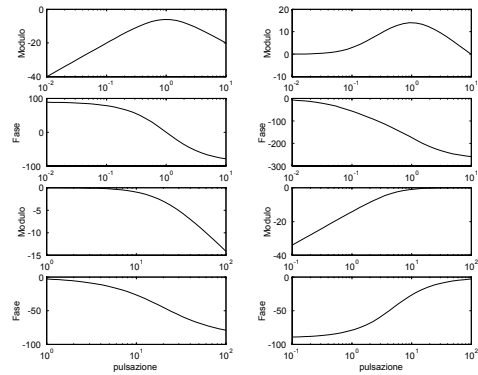


Figure 18:

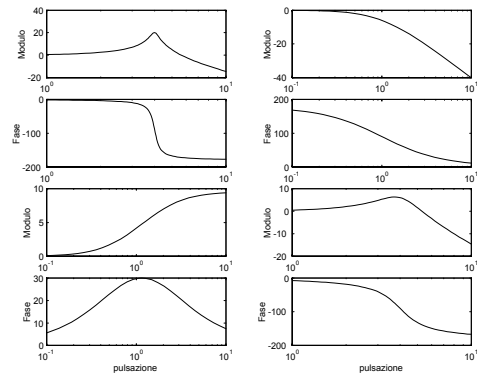


Figure 19:

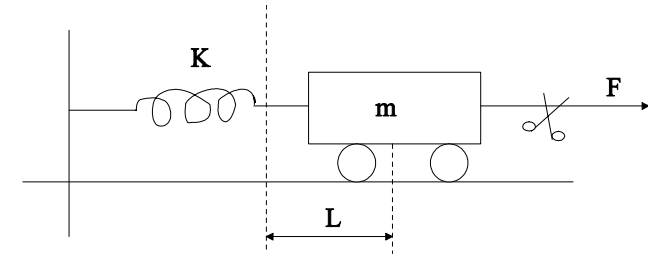


Figure 20:

### 37 Esercizio

Si consideri il sistema definito dalla seguente terna di matrici

$$F = \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H = [ 1 \quad 2 ]$$

1. Si verifichi l'osservabilità dello stato
2. Si calcoli l'uscita a regime per

$$u(t) = \begin{bmatrix} 10\text{sca}(t) \\ 50\text{sen}(t) \end{bmatrix}$$

### 38 Esercizio

Un sistema lineare invariante presenta con ingresso nullo un'uscita sinusoidale. Di che ordine può essere il sistema? Che caratteristica avranno i suoi autovalori?

### 39 Esercizio

Un sistema lineare invariante ha una funzione di trasferimento

$$Z(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+3)}$$

Si dica se è instabile, stabile o asintoticamente stabile e si giustifichi la risposta.

## 40 Esercizio

1. Si rappresenti graficamente in modo qualitativo il diagramma polare della risposta in frequenza del sistema avente funzione di trasferimento

$$Z(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

2. Si ricavi per quali frequenze l'uscita è sfasata rispetto all'ingresso di multipli di  $2\pi$  rad.

## 41 Esercizio

Due veicoli ( $V_1$  e  $V_2$ ) si muovono con le seguenti leggi:

$$V_1 \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \quad V_2 \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.25x_1 \end{cases}$$

dove  $x_1$  e  $x_2$  sono rispettivamente la posizione e la velocità dei veicoli. Supponendo che gli stati iniziali dei due veicoli siano

$$V_1 \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{cases} \quad V_2 \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 2 \end{cases}$$

dopo quanto tempo dall'istante iniziale  $\tau = 0$  i due veicoli si scontrano frontalmente?

## 42 Esercizio

Si disegnano i diagrammi cartesiani approssimati delle seguenti funzioni di trasferimento

$$L_1(s) = -\frac{1}{s}$$

$$L_2(s) = \frac{1}{s(1+10s)}$$

$$L_3(s) = \frac{10(1-s)}{s(1+0.1s)}$$

$$L_4(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+0.1s)}$$

$$L_5(s) = \frac{1}{s}$$

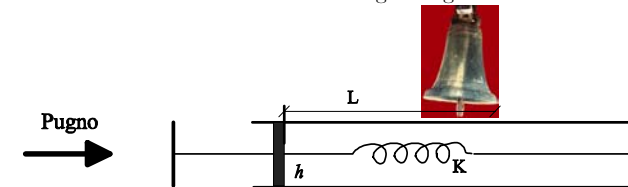
$$L_6(s) = \frac{10}{s(1+100s)^2}$$

$$L_7(s) = \frac{10}{(1+s+s^2)}$$

$$L_8(s) = \frac{1}{(1-s)}$$

## 43 Esercizio

In una fiera di paese i visitatori possono valutare la forza dei loro pugni utilizzando la macchina schematizzata nella figura seguente



dove  $L = 20$  cm è la distanza da far compiere al pistone per far suonare la campana,  $K = 20Kg/m$  è il coefficiente elastico della molla,  $h = 400Kg/m/s$

è il coefficiente di attrito lineare del pistone mentre la massa del pistone è trascurabile.

Il visitatore deve scagliare un pugno ogni 10 sec sino a far suonare la campana. A seconda del numero di colpi necessari per far suonare la campana la macchina dà i seguenti risultati:

Categoria	A	B	C	Ritirati!!
Numero colpi	1	2	3	>3

1. Qual'è la forza  $F$  in Kg con cui occorre colpire per appartenere alle diverse categorie?
2. Qual'è la forza al di sotto della quale la campana non suonerebbe nemmeno con un numero infinito di colpi?

## 44 Esercizio

Si consideri il sistema dinamico descritto da

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)(1 - x(t)u(t)) - \frac{x^2(t)}{1 + x(t)} \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

1. Determinare il valore di  $\bar{u}$  perchè si abbia un equilibrio con  $\bar{x} = 1$ .
2. Linearizzare il sistema attorno a tale punto di equilibrio, trovando le equazioni del sistema linearizzato in variabili di stato.
3. Studiare la stabilità di tale punto di equilibrio.
4. Calcolare il movimento libero e la risposta impulsiva dell'uscita del sistema linearizzato.
5. Ricavare la funzione di trasferimento del sistema linearizzato.
6. Utilizzando un'approssimazione lineare del sistema non lineare, determinare l'uscita **a regime** per

$$u(t) = 1.1 * \bar{u} + \text{sen}(4t)$$

## 45 Esercizio

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e spiegare brevemente il perchè.

- |  |                          |                          |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1) Le proprietà di stabilità di un sistema LTI dipendono solo dalle caratteristiche della matrice della dinamica A   | V                        | F                        |
|  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2) La sovralongazione massima percentuale della risposta allo scalino di un sistema del secondo ordine dipende solo dalla pulsazione naturale $\omega_N$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3) Un sistema asintoticamente stabile in anello aperto è sempre stabile anche in anello chiuso   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4) La risposta allo scalino di un sistema con lo stesso numero di poli e zeri è sempre uguale a zero per $t = 0$   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5) Dato il sistema LTI (A,B,C,D) l'osservabilità dipende solo dalle matrici (A,C)  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6) Un punto di equilibrio di un sistema non lineare è asintoticamente stabile se e solo se la matrice della dinamica A del sistema linearizzato intorno al punto di equilibrio ha tutti gli autovalori con parte reale negativa. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

## 46 Esercizio

Si studi la stabilità dei punti di equilibrio dei seguenti sistemi dinamici:

- 1)  $\dot{x}(t) = x^3(t)$
- 2)  $\dot{x}(t) = -x^3(t)$

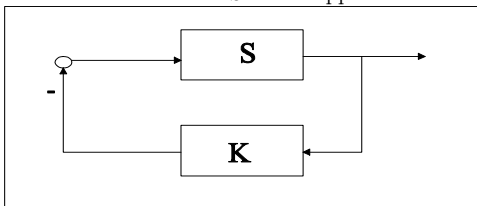
## 47 Esercizio

Il sistema S ha la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{3(1 + 10s)}{s^2(2s^2 + 3s + 1)}$$

1. Si studi la stabilità del sistema S

2. Supposto di retroazionare il sistema  $S$  come rappresentato in Figura



applicando il criterio di Routh-Hurwitz si calcoli per quali valori di  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

## 48 Risultati

### Esercizio 1

1.  $\bar{x}_1 = 5, \bar{x}_2 = 1.$

2.

$$A = \begin{bmatrix} -12 & -5 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 80 \end{bmatrix}, C = [ 1 \ 0 ]$$

3. Equilibrio asintoticamente stabile

4.

$$G(s) = \frac{-400}{(s+12)(s+10)}$$

### Esercizio 2

1. Variabili di stato  $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = i$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{1}{M} x_3^2 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L} x_3 + \frac{u}{L} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_3 &= \pm 7A \\ u &= \pm 28V \end{aligned}$$

3. Entrambi gli equilibri sono instabili.

### Esercizio 11

1. Non trabocca mai

2. Il livello oscilla tra 2.62 e 2.37.

### Esercizio 12

1.

$$A = \begin{bmatrix} -15 & 5 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [ 1 \quad -1 ], D = 0$$

2. Completamente raggiungibile

3.

$$K = [ 2 \quad 0 ]$$

4.

$$G(s) = \frac{5(s+6)}{(s+10)(s+3)}$$

5.

$$y_\infty = 100$$

**Esercizio 29**

$$V_s = 6.247$$

**Esercizio 31**

$$T = 0.59, K = -1.48$$

**Esercizio 36**

$$k = 0.0395, F = 0.19$$

**Esercizio 41**

Si scontrano dopo  $2\pi$

**Esercizio 43**

Categoria A (tira un colpo):  $F > 80Kg$

Categoria B (tira due colpi):  $49.8Kg \leq F \leq 80Kg$

Categoria C (tira tre colpi):  $40.52Kg \leq F \leq 49.8Kg$

Con una forza minore di  $31.5Kg$  la campana non suonerebbe mai nemmeno con un numero infinito di colpi uguali distanziati di 10 sec.

**Esercizio 44**

1.  $\bar{u} = 0.5$

2.

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= -\frac{3}{4} \delta x(t) - \delta u(t) \\ \delta y(t) &= \delta x \end{aligned}$$

3. Autovalore  $-\frac{3}{4}$  quindi l'equilibrio è asintoticamente stabile.

4.

$$x_l = e^{-\frac{3}{4}t} x(0)$$

$$g_y(t) = -e^{-\frac{3}{4}t}$$

5.

$$G(s) = -\frac{1}{s + 3/4}$$

6.

$$y(t) = 0.9333 + 0.2457 \text{sen}(4t - 4.53)$$

**Esercizio 45**

1. Vera. In particolare dipende dalla parte reale degli autovalori della matrice A

2. Falsa. S% dipende solo dallo smorzamento  $\xi$

3. Falsa. Chiudendo l'anello gli autovalori del sistema cambiano.

4. Falsa. E' uguale alla costante di trasferimento.

5. Vera. La matrice di osservabilità dipende solo da A e C

6. Falsa. Perchè il punto di equilibrio di un sistema non lineare può essere asintoticamente stabile anche se il sistema linearizzato ha autovalori con parte reale nulla.