

# Controlli automatici e controllo dei processi

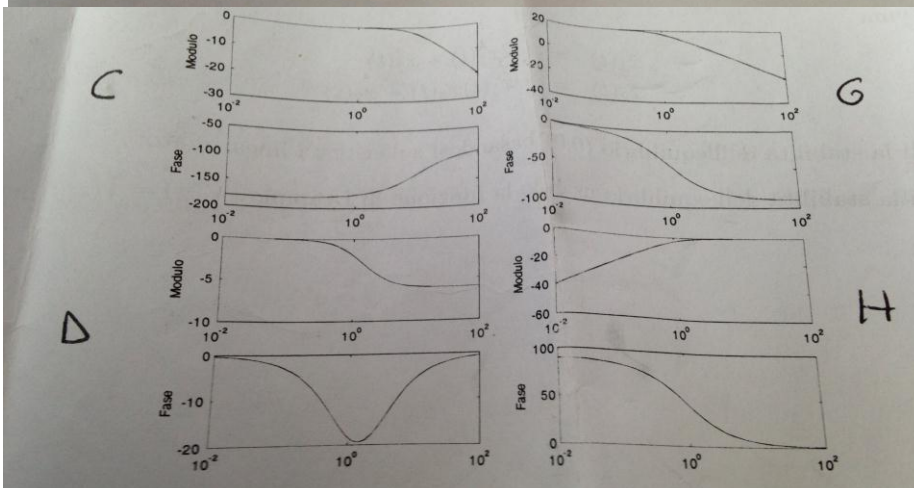
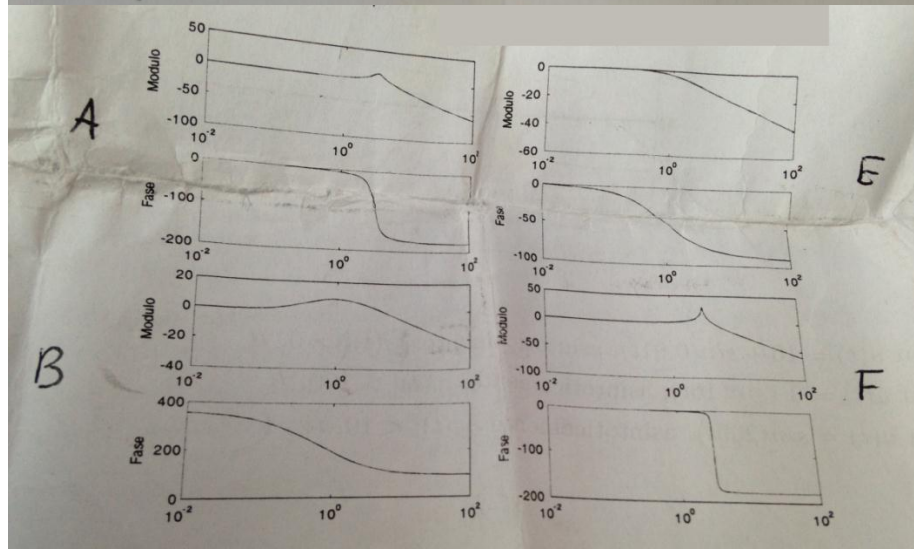
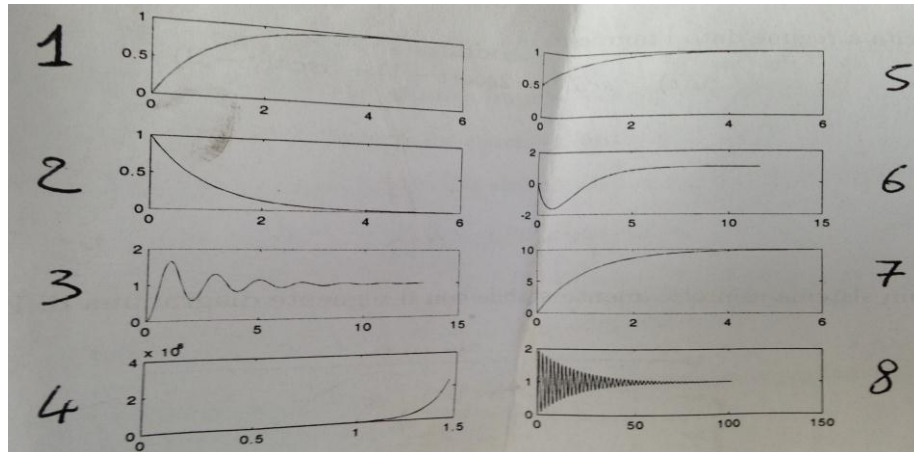
Docente: Davide M. Raimondo

Prova scritta: 01/03/2013

Durata: 3h

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

Esercizio 3: Si determini, motivando brevemente, la corrispondenza fra le risposte allo scalino unitario e i diagrammi di Bode riportati sotto.



Soluzioni:

La risposta allo scalino di Figura **1** parte da 0 e converge a 1. Il guadagno è dunque 1. La derivata in 0 è positiva. L'andamento è quello di un sistema del primo ordine con un solo polo. Per un sistema del primo ordine senza zeri si raggiunge il 99% del valore di regime dopo  $4.6T$ . Ne consegue che  $T$  è approssimativamente 0.87 e che quindi si ha un polo in  $1/0.87=1.15$ . Il diagramma di Bode dovrebbe partire piatto e, visto il guadagno unitario  $20\log_{10}1=0$  parte con 0db per poi scendere di 20db/dec. Ne consegue che il diagramma corrispondente è **E**.

L'andamento nel tempo di Figura **2** parte da 1 e converge a 0. Il sistema è stabile. La derivata in 0 è infinito visto il salto da 0 a 1 a  $t=0^+$ . Per la proprietà bloccante degli zeri, poichè il sistema converge a zero, ci si aspetta uno zero nell'origine (la stessa cosa si può vedere applicando il teorema del valore finale). Oltre allo zero ci sarà chiaramente un polo. Sulla base delle considerazioni fatte, il diagramma **H** è corente con la figura 2.

La Figura **3** e la Figura **8** hanno un andamento oscillante dovuto a poli complessi coniugati. Le figure sono chiaramente associate ai diagrammi A o F che presentano il picco di risonanza tipico di poli complessi coniugati. Le figure A e F si differenziano per l'altezza del picco. Il picco è tanto più alto quanto è più piccolo il valore di smorzamento  $\xi$ . La  $\xi$  è legata alla velocità di convergenza in quanto costituisce meno la parte reale dei poli. Tanto più è negativa quanto più si convergerà velocemente e con meno oscillazioni. In conclusione **8** è **F** mentre **3** è **A**.

La Figura **4** è chiaramente associata ad un sistema instabile. Può essere associata al diagramma **C** in quanto si ha un polo per cui la fase invece di scendere cresce di  $90^\circ$ .

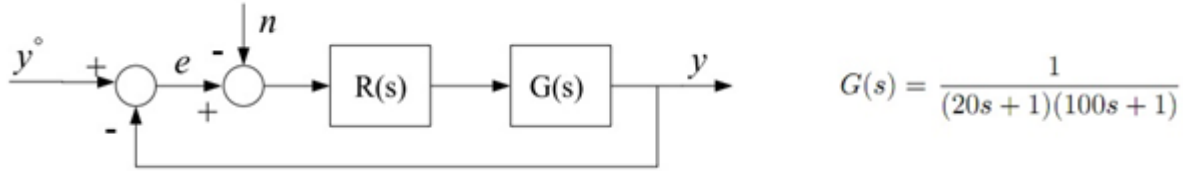
La Figura **5** presenta uno zero ed un polo a causa della discontinuità dell'origine (la derivata in 0 è infinito perciò ho numero poli=numero zeri). Diversamente dalla Figura 2, l'andamento converge a 1 perciò lo zero non è nell'origine. Il guadagno è dunque 1. Siccome non ci sono sovralongazioni lo zero è più veloce del polo. Questo è concorde con il grafico **D** in cui, guardando il grafico dei moduli e quello delle fasi, si può notare la presenza prima un polo e poi uno zero.

La Figura **6** ha chiaramente una risposta inversa. La risposta inversa è dovuta ad uno zero a parte reale positiva. Analizzando i diagrammi di bode si nota come la figura B presenta una crescita del modulo cui però corrisponde una decrescita della fase, quindi uno zero a p.r. positiva. In conclusione alla figura 6 corrispondono i diagrammi **B**.

L'andamento in Figura **7** è chiaramente associato al diagramma **G** in quanto il modulo è 10 a cui corrispondono 20db per la frequenza 0.

Esercizio 5:

Si consideri il sistema di controllo in figura:



Si determini la funzione di trasferimento del regolatore  $R(s)$  in modo che:

- (a) l'errore a transitorio esaurito  $e_\infty$  verifichi  $|e_\infty| \leq 1$  quando  $y^o(t) = 10sca(t)$ ;
- (b) il margine di fase  $\phi_m$  verifichi  $\phi_m \geq 75^\circ$ ;
- (c) la banda passante del sistema di controllo sia maggiore o uguale a  $0.01 \text{ rad/s}$ .
- (d) Un disturbo  $n(t) = \sin(\omega t)$ ,  $\omega \geq 0.2 \text{ rad/s}$  sia attenuato sull'uscita a regime di un fattore almeno pari a 25.
- (e) *Facoltativo:* Si modifichi la funzione di trasferimento del regolatore in modo che i punti a-d precedenti siano ancora soddisfatti ma che il margine di fase sia maggiore di  $75^\circ$  anche in presenza di un ritardo di tempo che modifica la  $G(s)$  come segue

$$G(s) = 10 \frac{e^{-5s}}{(20s + 1)(100s + 1)}$$

(a) La funzione di trasferimento che lega  $Y_0(s)$  a  $E(s)$  è

$$\frac{1}{1+R(s)G(s)}$$

Ne consegue che

$$E(s) = \frac{Y_0(s)}{1+R(s)G(s)} = \frac{10}{s(1+R(s)G(s))}$$

Applicando il teorema del valore finale

$$\lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{1+R(s)G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{R(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{1 + \frac{1}{(20s+1)(100s+1)}}$$

Affinchè  $e_\infty$  sia in valore assoluto minore di 1 esistono 2 alternative: mettere un integratore nella funzione  $R(s)$  oppure agire opportunamente sul guadagno di  $R(s)$ . Lo svantaggio dell'integratore è la riduzione del margine di fase. Visto che un integratore porta l'errore a transitorio esaurito a 0 mentre la richiesta è di modulo inferiore ad 1, proviamo ad agire solo sul guadagno di  $R(s)$ . La funzione  $R(s)$  sarà dunque del tipo

$$R(s) = \frac{\mu N(s)}{D(s)} \quad \text{dove } N(s) \text{ e } D(s) \text{ sono poli e zeri della } R(s). \text{ Visto che il guadagno della f.d.t. è } \mu, \text{ per } s=0 \text{ si ha } N(s)=1, D(s)=1.$$

A questo punto si ottiene

$$\frac{10}{|1+\mu|} \leq 1 \quad \text{--->} \quad |1+\mu| \geq 10 \quad \text{--->} \quad \mu \leq -11 \text{ o } \mu \geq 9$$

Scegliamo  $\mu=10$  (scegliendolo positivo potremo applicare il criterio di Bode) e riscriviamo  $\mu G(s)$

$$\mu G(s) = \frac{10}{(20s+1)(100s+1)}$$

Tracciamo ora il grafico di questa possibile  $L(s)$ . Il grafico taglia l'asse 0dB in circa 0.055rad/s. Utilizzando il regolino il polo in 1/100 ha contribuito -79 mentre quello in 1/20 ha contribuito di -48. Di conseguenza il margine di fase è  $180-|-79-48|=53^\circ < 75^\circ$  richiesti e il punto (b) non è soddisfatto. Per aumentare il margine di fase spostato, tramite  $R(s)$  il polo in 1/100 in 1/1000.

$$R(s) = \frac{10(100s+1)}{(1000s+1)}$$

In questo modo la  $L(s)$  taglia gli 0dB in 0.01rad/s. Utilizzando il regolino, il contributo del nuovo polo in 1/1000 è -85 mentre il contributo del polo in 1/20 è pari a -11. Il margine di fase è dunque  $180-|-85-11|=84^\circ$ . Il punti (b) e (c) sono soddisfatti.

(d) l'attenuazione di un fattore di almeno 25 corrisponde ad un valore in dB  $=20\log(1/25)=-27.9588$ . La funzione che lega  $Y(s)$  a  $N(s)$  è  $-F(s)$  dove  $F(s)$  è la funzione di sensitività complementare  $L(s)/(1+L(s))$ . Il modulo asintotico della  $F(s)$  (e di conseguenza anche di  $-F(s)$ ) è di 0dB fino alla  $w_c$  mentre per frequenze superiori alla  $w_c$  è pari a quello della  $L(s)$ . Siccome la frequenza della sinusoidale è 0.2, quindi superiore  $w_c$   $-F(s)$  si comporta come  $L(s)$ . Per frequenze  $\geq 0.2$  il modulo è  $\leq -35$ dB. Il punto (d) è dunque soddisfatto.

(e) l'effetto del ritardo di tempo è quello di ridurre il margine di fase.  $180-|-85-11-w_c \cdot \tau|$   
 $180/\pi = 180-|-85-11-2.8648|=81.14^\circ$ . Anche in presenza del ritardo di tempo il margine di fase è superiore ai  $75^\circ$  richiesti.

Esercizio 6:

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Punteggio: risposta esatta= 1, errore= -0.5, non risponde= 0.

V F

(a) Si consideri un sistema di controllo con funzione di trasferimento d'anello  $L(s)$  e retroazione unitaria e negativa. Se  $|L(j\omega)| < 0.9, \forall \omega \geq 0$  allora il sistema di controllo è asintoticamente stabile.

(b) La connessione in serie di due sistemi LTI SISO asintoticamente stabili può essere instabile.

(c) Si assuma che la funzione di trasferimento  $G(s)$  sia asintoticamente stabile e verifichi  $G(j2) = 2e^{j\pi}$  e  $G(j5) = 3e^{-j\pi}$ . Allora, per  $t \rightarrow +\infty$ , la risposta a  $u(t) = -\sin(2t + \frac{\pi}{2}) + \sin(5t + \pi)$  converge alla funzione  $\tilde{y}(t) = -2\sin(2t + \frac{3}{2}\pi) + 3\sin(5t)$ .

(d) Il sistema LTI  $(A, B, C, D)$  con  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $C = [ 1 \ 0 ]$  è osservabile.

(e) Se la risposta all'impulso dell'uscita di un sistema LTI SISO è illimitata allora il sistema è instabile.

Se un equilibrio di un sistema LTI è asintoticamente stabile allora qualunque movimento di stato del sistema è asintoticamente stabile.

Motivazioni:

- (a) Se il modulo di L è sempre minore di 1, allora non c'è modo di compiere giri attorno a -1. Detto questo, il teorema di Nyquist richiede N=P con P numero di poli a parte reale positiva. Il punto (a) non specifica se L abbia o meno poli a p.r. >0 perciò l'affermazione non è vera.
- (b) I poli di una connessione in serie di sistemi SISO sono i poli del primo e del secondo sistema. Ne consegue che se i due sistemi sono singolarmente asintoticamente stabili, anche il sistema connessione dei due sarà asintoticamente stabile
- (c) Applicando il teorema della risposta in frequenza e la sovrapposizione degli effetti il risultato è corretto.
- (d) La matrice di raggiungibilità del sistema è a rango massimo. Perciò il sistema è completamente osservabile.
- (e) Applicando la formula di Lagrange, la risposta dell'uscita all'impulso è pari a  $Ce^{At}B$ . Ne consegue che se la risposta è illimitata il sistema è instabile. Infatti, ipotizzando A scalare e per esempio pari a +1 con C=1 e B=1 è evidente che  $e^t$  esplose.
- (f) Nel caso di sistemi LTI non si parla di stabilità dell'equilibrio ma di stabilità del sistema in quanto se il sistema è stabile, qualunque equilibrio e movimento è stabile