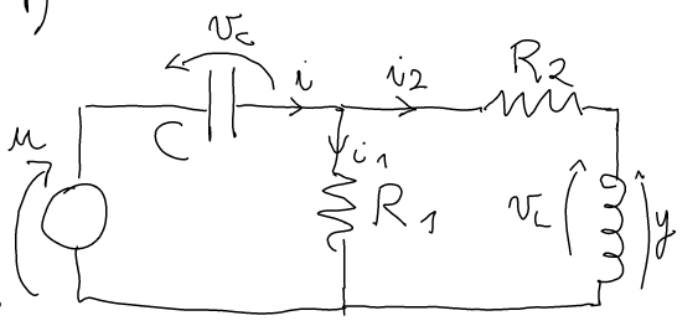
1)



$R_1 = R_2 = 1 \quad C = 2 \quad L = 0.5$

$i = i_1 + i_2 \qquad C\dfrac{dv_c}{dt} = i \qquad L\dfrac{di_2}{dt} = v_L$

scelgo v_c e i_2 come variabili di stato in quanto ne appare la derivata

$$u - v_c - R_1(i - i_2) = 0 \longrightarrow u - v_c - R_1\left(C\frac{dv_c}{dt} - i_2\right) = 0$$

$$u - v_c - R_2 i_2 - v_L = 0 \qquad u - v_c - R_2 i_2 - L\frac{di_2}{dt} = 0$$

$$u - v_c - R_1 C\frac{dv_c}{dt} + R_1 i_2 = 0$$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{u - v_c + R_1 i_2}{R_1 C} = \frac{u}{2} - \frac{v_c}{2} + \frac{i_2}{2}$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{u - v_c - R_2 i_2}{L} = 2u - 2v_c - 2i_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= v_c \\ x_2 &= i_2 \end{aligned}}$$

$$y = u - v_c - R_2 i_2 = u - v_c - i_2$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}u \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 2x_2 + 2u \\ y = -x_1 - x_2 + u \\ x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases} \longrightarrow$$

a)
$$\begin{cases} \underbrace{\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix}}_{C} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & -2 \end{bmatrix}}^{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}}^{B} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}}_{D}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 1u \\ x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

b) $$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & \lambda + 2 \end{bmatrix}\right) = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(\lambda + 2) + 1$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{2}\lambda + 1 + 1$$

$$= \lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda + 2$$

A.S. STABILE

$\longrightarrow$ condizione necessaria e sufficiente per a.s. stabilità è che i coeff abbiano tutti stesso segno (vale se l'ordine è ≤ 2) e siano $\neq 0$

c) $G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1/2 & -1/2 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix} + 1$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+\frac{5}{2}s+2} \begin{bmatrix} s+2 & 1/2 \\ -2 & s+1/2 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}}{s^2+\frac{5}{2}s+2} \begin{bmatrix} s+2 & 1/2 \\ -2 & s+1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix} + 1$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} -s-\cancel{2}+\cancel{2} & -1/2-s-1/2 \end{bmatrix}}{s^2+5/2\,s+2} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix} + 1$$

$$= \frac{-\cancel{1/2}\,s - 1 - \cancel{2}s + s^2 + \cancel{5/2}\,s + 2}{s^2+5/2\,s+2} = \frac{s^2+1}{s^2+5/2\,s+2}$$

$s_{1,2} = \pm i$

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{32}{4}}}{2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$$

Guardando le radici di numeratore e denominatore non vi sono semplificazioni

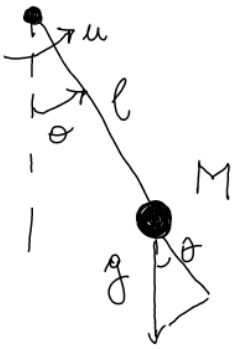
d) La stabilità esterna coincide dunque con quella interna (as. stabilità).

e) $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \rightarrow Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s^2+1}{s^2+\frac{5}{2}s+2} \cdot \frac{1}{s}$

A regime l'uscita è

$$\lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{s^2+1}{s^2+5/2\,s+2} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = 1/2$$

Esercizio 2)



$M = 1 \quad g = 9.81 \quad l = 1 \quad K = 1$

$$M l^2 \alpha = -Mg\sin\theta + u \qquad \dot{\theta} = \omega \qquad \theta = x_1$$
$$\dot{\omega} = \alpha \qquad \omega = x_2$$

$$\begin{cases} M l^2 \dot{x}_2 = -Mgl\sin x_1 + u \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ y = x_1 \\ x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g\sin x_1 + \frac{u}{Ml^2} = -9.81\sin x_1 + u \\ y = x_1 \\ x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases} \quad (1)$$

Per determinare i punti di equilibrio per $u_{eq} = 0$

$\dot{x}_1 = 0 \longrightarrow 0 = x_2$

$\dot{x}_2 = 0 \longrightarrow 0 = -9.81\sin x_1 + u_{eq}$

$0 = -9.81\sin x_1 \quad (2)$

$\downarrow$

$\sin x_1 = 0 \longrightarrow \boxed{x_1 = K\pi, \quad K \geq 0 \qquad x_2 = 0}$

3) Consideriamo gli equilibri

a) $\boxed{x_1 = 0 \quad x_2 = 0}$ b) $\boxed{x_1 = \pi \quad x_2 = 0}$

linearizziamo attorno ad a)

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = \delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = -9.81\cos x_1\big|_{x_1=0} \cdot \delta x_1 + \delta u \\ \quad = -9.81\,\delta x_1 + \delta u \\ \delta y = \delta x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{bmatrix} \delta x_1/\delta t \\ \delta x_2/\delta t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.81 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \delta u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D}\,\delta u \end{cases}$$

linearizziamo attorno a b)

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = \delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = -9.81 \cos x_1 \big|_{x_1=\pi} \cdot \delta x_1 + \delta u \\ \quad = 9.81\, \delta x_1 + \delta u \\ \delta y = \delta x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \delta x_1/\delta t \\ \delta x_2/\delta t \end{bmatrix} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.81 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \delta u \\ y = \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \underset{D}{0}\, \delta u \end{cases}$$

4) Se con stabilità si intende stabilità interna, allora guardo le matrici A

caso a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.81 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 9.81 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + 9.81 = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-9.81}$$

$$= \pm\sqrt{9.81}\, j$$

Quando linearizzo, se ho degli autovalori a p.r $= 0$, non posso concludere nulla sulla stabilità

caso b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.81 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -9.81 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 9.81 = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{9.81}$$

Il punto di equilibrio b) è instabile poiché un autovalore ha p.r. > 0

Per l'equilibrio a) posso usare il criterio $\varepsilon - \delta$ scegliendo $\varepsilon = \delta$ dimostro che il punto di equilibrio a) è semplicemente stabile.

Esercizio 3)

$$G(s) = \frac{1}{s^5 + 15s^4 + 85s^3 + 225s^2 + 24s + 120}$$

$$\varphi(s) = \varphi_0 s^5 + \varphi_1 s^4 + \varphi_2 s^3 \dots$$

	h	1	85	24
	h k	15	225	120
h	k l	70	16	0
k	l	221.57	120	0
l		-21.9		

$$\boxed{l_i = h_{i+1} - \frac{h_1 k_{i+1}}{k_1}}$$

$$l_1 = 85 - \frac{1 \cdot 225}{15} = 70$$

$$l_2 = 24 - \frac{1 \cdot 120}{15} = 16$$

$$l_3 = 0 - \frac{1 \cdot 0}{15} = 0$$

$$l_1 = 225 - \frac{15 \cdot 16}{70} = 221.57$$

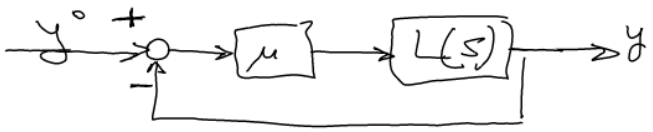
$$l_2 = 120 - \frac{15 \cdot 0}{70} = 120$$

$$l_1 = 16 - \frac{70 \cdot 120}{221.57} = -21.9$$

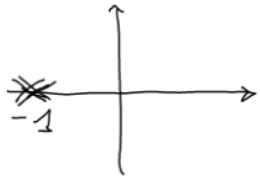
Negativo!

gli elementi della prima colonna non hanno tutti stesso segno - IL sistema non è asintoticamente stabile

Esercizio 4)

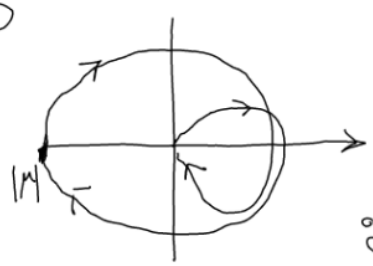


$$L(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$



ω	$\lvert\ \rvert$	$\angle$
0	$\lvert\mu\rvert \cdot 1$	$\arctan(0/\mu) - 3\arctan(0/1) = \begin{cases} -180, & \mu<0 \\ 0, & \mu \geq 0 \end{cases}$
∞	$\lvert\mu\rvert \cdot \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+\omega^2})^3} = 0$	$\arctan(0/\mu) - 3\arctan(\infty/1) = \begin{cases} -180-270 = -450^\circ, & \mu<0 \\ -270^\circ, & \mu \geq 0 \end{cases}$

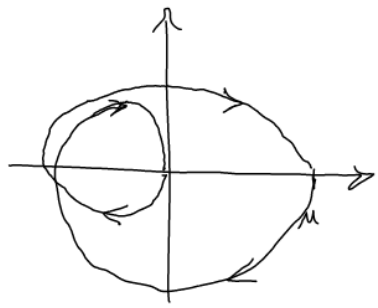
$\mu<0$



È sufficiente che $\mu > -1$ affinché non vi siano giri attorno a -1

$\rightarrow \mu > -1 \rightarrow$ AS. STABILITÀ

$\mu>0$



Per $\mu>0$, bisogna calcolare il valore del modulo quando la fase è -180

Determino la ω per cui la fase è -180

$-3\arctan(\omega) = -180$

$\arctan(\omega) = 60$

$\omega = 1.7321$

Vedo il modulo

$$|\mu L(j\omega)| = |\mu| \cdot \frac{1}{|1+j\omega|^3} = \frac{|\mu|}{(\sqrt{1+\omega^2})^3}$$

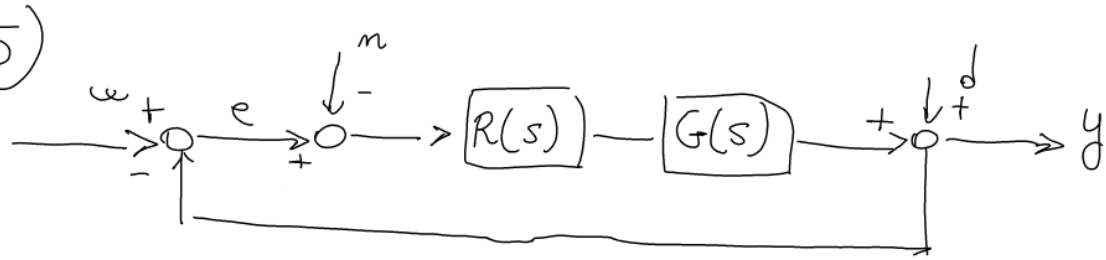
$$= \frac{|\mu|}{(\sqrt{1+1.7321^2})^3} = \frac{|\mu|}{8.0005}$$

$$\frac{|\mu|}{8.0005} < 1 \quad \text{per stabilità asintotica}$$

$$\boxed{|\mu| < 8.0005}$$

$$\boxed{-1 < \mu < 8.0005}$$

Esercizio 5)



$$G(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

a) $|e_\infty| \leq 0.1$ per $w(t) = A\,sca(t)$, $d(t) = B\,sca(t)$, $|A| \leq 1$, $|B| \leq 5$

$$E(s) = W(s) - E(s) \cdot R(s) \cdot G(s)$$

$$(1 + R(s)G(s))\,E(s) = W(s) \qquad \boxed{E(s) = \frac{W(s)}{1+R(s)G(s)}}$$

$$E(s) = -D(s) - E(s) \cdot R(s) \cdot G(s)$$

$$(1 + R(s)G(s))\,E(s) = -D(s) \qquad \boxed{E(s) = \frac{-D(s)}{1+R(s)G(s)}}$$

$$E(s) = \frac{W(s) - D(s)}{1 + R(s)G(s)} \qquad |E(s)| \leq \frac{6}{1+R(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s}$$

$(5+1)$ → Ricorda che $|A| \leq 1$ $|B| \leq 5$

$\frac{1}{s}$ → visto che $W(s)$ e $D(s)$ sono scalini

Affinché $|e_\infty| \leq 0.1$

$$\lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{6}{1 + R(s) \cdot (1+10s)(1+5s)(1+s)} \cdot \frac{1}{\cancel{s}}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{6}{1 + \frac{\mu_R}{s}} = \frac{6s}{s + \mu_R} = 0$$

se scelgo $R(s) = \frac{\mu_R}{s}$

Regolatore è un integratore

$$\lim_{s \to 0} \frac{6}{1+\mu_R} \leq 0.1$$

se non uso un integratore e $R(s) = \frac{\mu_R (1+\gamma s)(1+\delta s)}{(1+\alpha s)(1+\beta s) \cdots}$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ valori qualunque

$$\lim_{s \to 0} R(s) = \mu_R$$ → μ_R è ciò che conta per e_∞

$6 \leq 0.1 + 0.1\mu_R$

$5.9 \leq 0.1\mu_R$

$\mu_R \geq 59$

Quindi per avere $|e_\infty| \leq 0.1$, o uso un integratore, o un $\mu_R > 59$

b) $\omega_c \geq 0.2$

$$G(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

ho poli in $\omega = 0.1, 0.2, 1$

Se voglio una banda ≥ 0.2 o metto a $R(s) \cdot G(s)$ guadagno alto oppure elimino poli a bassa frequenza con il regolatore $R(s)$

Proviamo a spostare i 3 poli 2 a + alta frequenza e uno a + bassa

$$R(s) = \frac{60\,(1+5s)(1+s)(1+10s)}{(1+0.1s)^2(1+100s)}$$

$$R(s)G(s) = \frac{60}{(1+100s)(1+0.1s)^2}$$

Faccio Bode di questo

$\omega_c \cong 0.65$ e c) $\varphi_m = 180 - \varphi_c$

$\cong 180 - 90 = 90^\circ$

soddisfo anche punto c)

Il libro di testo contiene esattamente questo esercizio e propone delle alternative per $R(s)$

Da leggere con attenzione