

# MPC e incertezze politopiche di modello

*Alessandro Casavola*

casavola@si.deis.unical.it

Dipartimento di Elettronica, Informatica e Sistemistica  
Università della Calabria

Scuola CIRA - Controllo Predittivo  
Bertinoro, 18-21/7/2001

## Approcci

Due approcci sono emersi per lo studio della robustezza delle leggi di controllo predittive.

- Analisi della robustezza. Il controllo MPC è progettato sul modello nominale trascurando l'incertezza.
  - Si vuole indagare quanto una certa legge di controllo MPC sia intrinsecamente robusta.
  - Non si considera nessun specifico modello di incertezza.
  - Studi rivolti per la maggior parte al caso lineare senza vincoli. Di maggior interesse quelli per il caso vincolato o nonlineare.
- Sintesi robusta MPC. Si considerano esplicitamente modelli d'incertezza. Si vuole garantire stabilità e risolubilità (feasibility) per tutte le realizzazioni ammissibili dell'incertezza.
  - Si utilizzano modelli d'incertezza che portano a schemi MPC numericamente trattabili (problemi convessi a dimensione finita).
  - Usualmente si considerano problemi minmax: minimizzazione del costo rispetto al caso peggiore dovuto all'incertezza di modello.

## Esempi del primo approccio

- **Monotonicità del costo**<sup>1</sup>

- Se si riesce a garantire la seguente proprietà di monotonia

$$J(x(t+1), \xi) - J(x(t), \xi) < -x'(t)Qx(t) - u'(t)Ru(t), \quad \forall t, \quad \forall \xi \in \mathcal{B}$$

per un'incertezza  $\xi \in \mathcal{B}$  sufficientemente piccola, si può garantire la stabilità robusta.

- **Margini di stabilità garantiti**

- Si cerca di dimostrare che una certa legge MPC è equivalente ad una legge di controllo di cui si conosce il margine di stabilità (es. LQ sopporta variazioni del guadagno di anello comprese fra  $[0.5, \infty)$ ).
- Ottimalità inversa.<sup>2</sup>

- **MPC  $H_\infty$** <sup>3</sup>

- Si cerca di riottenere schemi MPC con le note proprietà di robustezza del controllo  $H_\infty$  rispetto ad incertezza non-strutturata. D'interesse soprattutto nel caso vincolato o nonlineare.

---

<sup>1</sup>H.Michalska, D.Q.Mayne “Robust receding horizon control of constrained non-linear systems”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 38:1623-1633, 1993.

<sup>2</sup>G.De Nicolao, L.Magni, R.Scattolini “On the robustness of receding-horizon control with terminal constraints”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 41:452-453, 1996.

<sup>3</sup>H.Chen, C.Scherer, F.Allgöwer “A game theoretical approach to nonlinear robust receding horizon control of constrained systems”, *Proceedings of American Control Conference*, Albuquerque, NM, USA, 1997.

## Secondo approccio - modelli d'incertezza considerati

- Incertezza sulla risposta all'impulso e al gradino del sistema ad anello aperto

$$\underline{w} \leq w(i) \leq \bar{w}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$
$$\underline{s} \leq \sum_{k=0}^i w(k) \leq \bar{s}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

- Incertezza “Norm-bound” (NB) sulle matrici ad anello aperto del sistema

$$\Phi(\Delta) = (\Phi + B_p \Delta C_q), \quad \Delta \text{ incerta con}$$
$$\Delta' \Delta \leq I$$

- Incertezza politopica sulle matrici ad anello aperto del sistema

$$\Phi(p) = \sum_{i=1}^l p_i \Phi_i, \quad \text{con } p \in \mathbb{R}^l \text{ incerto, tale che}$$

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^l p(i) = 1 \quad - \text{simplex unitario}$$

## MPC relativi a incertezza sulla risposta all'impulso

- Sono stati i primi schemi MPC vincolati lineari che tengono conto esplicitamente dell'incertezza. L'impianto è assunto stabile e a risposta finita (FIR)
  - P.J.Campo, M.Morari, "Robust model predictive control", *Proc. ACC87*, 1987;
  - J.C.Allwright, G.C.Papavasiliou, "On linear programming and robust model-predictive control using impulse-response", *Systems and Control Letters*, 18:159-164,1992;
  - H.Genceli, M.Nikolaou, "Robust stability analysis of constrained  $l_1$ -norm model predictive control", *AIChE Journal*, 39:1954-1965, 1993;
- Incertezza non strutturata. Il modello d'incertezza è irrealistico e conservativo.

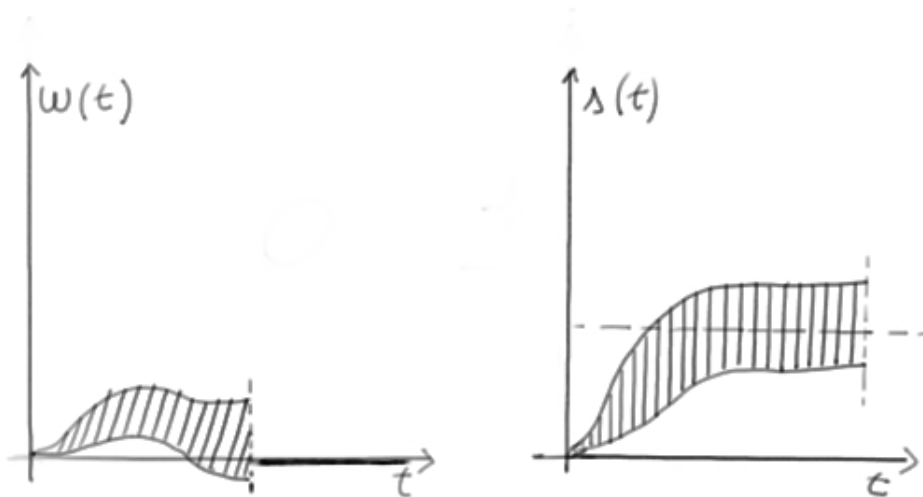


Figure 1: Incertezza sulla risposta al gradino indotta dall'incertezza sulla risposta all'impulso

- La complessità numerica degli schemi cresce esponenzialmente col crescere dell'orizzonte di controllo  $N$ .

## Paradigma LFR e incertezza Norm-bound<sup>4</sup>

$$\begin{cases} x(t+1) &= \Phi x(t) + Gu(t) + B_p p(t) \\ y(t) &= H x(t) + Du(t) + B_{yp} p(t) \\ q(t) &= C_q x(t) + D_q u(t) \\ p(t) &= \Delta(t) q(t), \quad \Delta'(t) \Delta(t) \leq I \end{cases}$$

$\Delta(t) = \Delta(t, x(t), u(t))$  è una matrice diagonale a blocchi, in generale tempo-variabile e dipendente dallo stato e dall'ingresso.

- La precedente formulazione equivale a

$$\begin{cases} x(t+1) &= \Phi(\Delta(t))x(t) + G(\Delta(t))u(t) \\ y(t) &= H(\Delta(t))x(t) + D(\Delta(t))u(t) \\ &\Delta'(t) \Delta(t) \leq I \end{cases}$$

con

$$\begin{bmatrix} \Phi(\Delta) & G(\Delta) \\ H(\Delta) & D(\Delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi + B_q \Delta C_q & G + B_q \Delta D_q \\ H + B_{yp} \Delta C_q & D + B_{yp} \Delta D_q \end{bmatrix}$$

Equivalentemente, il sistema può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} x(t+1) &= \Phi x(t) + Gu(t) + B_p p(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Du(t) + B_{yp} p(t) \end{cases}$$

$$p'(t)p(t) \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} C_q' C_q & C_q' D_q \\ D_q' C_q & D_q' D_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

---

<sup>4</sup>Caso  $N = 0$  - M.V.Kothare, V.Balakrishnan, M.Morari, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities", *Automatica*, 32:1361-1379, 1996.

## Paradigma politopico o multi-modello

$$\begin{cases} x(t+1) &= \Phi(p(t))x(t) + G(p(t))u(t) \\ y(t) &= H(p(t))x(t) + D(p(t))u(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Phi(p) &:= \sum_{i=1}^l p_i \Phi_i, & G(p) &:= \sum_{i=1}^l p_i G_i, \\ H(p) &:= \sum_{i=1}^l p_i H_i, & D(p) &:= \sum_{i=1}^l p_i D_i \end{aligned}$$

$$p = [p_1, p_2, \dots, p_l]' \in \mathbb{R}^l, \quad p \in \mathcal{P} := \{p \in \mathbb{R}^l : \sum_{i=1}^l p_i = 1, p_i \geq 0\}$$

$p(t) = p(t, x(t), u(t))$  è il vettore, in generale tempo-variante e dipendente dallo stato e dall'ingresso, che specifica un elemento nella famiglia politopica.

Si può pensare che i vertici rappresentino il sistema in punti di lavoro specifici. È alla base della modellistica fuzzy.

## Paradigma d'interesse per

- Sistemi lineari con incertezza parametrica politopica;
- Sistemi lineari a parametri varianti (LPV);
- Sistemi Quasi-LPV e nonlineari;
- Un misto dei tre modelli precedenti;

## Sistemi lineari con incertezza politopica - MPC robusto

Il parametro  $p$  si considera sconosciuto e non-misurabile. L'unica assunzione è che  $p(t) \in \mathcal{P}$ ,  $\forall t$

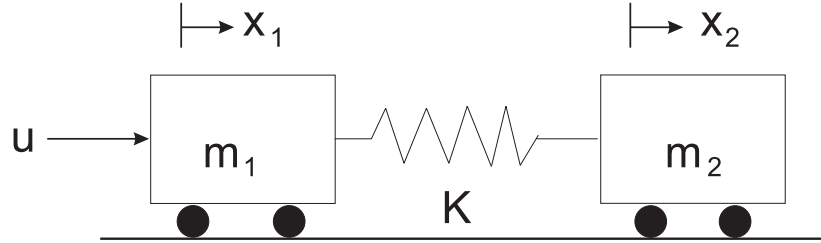


Figure 2: Esempio di sistema incerto. La costante elastica  $K$  è incerta,  $K_m \leq K \leq K_M$

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ -0.1 \frac{K}{m_1} & 0.1 \frac{K}{m_1} & 1 & 0 \\ 0.1 \frac{K}{m_2} & -0.1 \frac{K}{m_2} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi(K)} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{0.1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = x_2(t).$$

Ponendo  $p = \frac{K-K_m}{K_M-K_m} \Rightarrow K = pK_M + (1-p)K_m$ ,  $p \in [0, 1]$ .

$$\Phi(p) = p\Phi(K_M) + (1-p)\Phi(K_m), \quad G(p) = pG + (1-p)G \equiv G$$

**N.B.** - L'incertezza sulla risposta all'impulso per sistemi SISO a risposta finita può essere descritta da un modello lineare politopico.

## Sistemi lineari a parametri varianti (LPV) - MPC gain-scheduling

- Il parametro  $p(t)$ , continuo a tratti, si considera misurabile in linea e disponibile per il feedback. Le assunzioni su  $p(t)$  sono

$$\begin{aligned} p(t) &\in \mathcal{P}, & \mathcal{P} &\text{ convesso e compatto} \\ \delta p(t) := p(t+1) - p(t) &\in \Delta\mathcal{P}, & \Delta\mathcal{P} &\text{ convesso e compatto} \end{aligned}$$

- Se la traiettoria  $p(\cdot)$  è nota si parla di sistema LTV. Nei sistemi LPV invece la sequenza  $p(\cdot)$  è assunta misurabile ma non conosciuta a-priori.
- Se gli insiemi  $\mathcal{P}$  e  $\Delta\mathcal{P}$  non sono limitati, si parla di sistemi “Quasi-LPV”.

## Sistemi Quasi-LPV - MPC nonlineare

- Il parametro  $p$  può comprendere componenti dello stato misurabili.
- Questo può dar luogo a politopi di matrici non limitati, cioè poliedri di matrici. Si può rimanere nel paradigma LPV imponendo vincoli espliciti sulle componenti di  $p$  non limitate.
- Questa tecnica è potenzialmente applicabile a una larga classe di sistemi nonlineari.

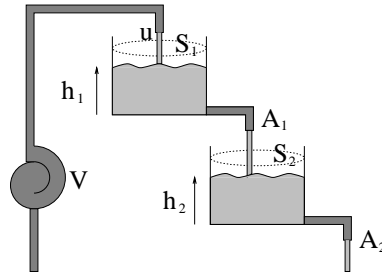


Figure 3: Esempio di sistema nonlineare

Modello nonlineare

$$\begin{cases} \rho S_1 \dot{h}_1 = -\rho A_1 \sqrt{2gh_1} + u \\ \rho S_2 \dot{h}_2 = \rho A_1 \sqrt{2gh_1} - \rho A_2 \sqrt{2gh_2} \end{cases}$$

Modello LPV

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{A_1 \sqrt{2g}}{S_1} \frac{1}{\sqrt{h_1}} & 0 \\ \frac{A_1 \sqrt{2g}}{S_2} \frac{1}{\sqrt{h_1}} & -\frac{A_2 \sqrt{2g}}{S_2} \frac{1}{\sqrt{h_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho S_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ 0 < \underline{h}_1 \leq h_1 \leq \bar{h}_1 \\ 0 < \underline{h}_2 \leq h_2 \leq \bar{h}_2 \end{cases}$$

Definendo

$$p_1(t) = \frac{\frac{1}{\sqrt{h_1(t)}} - \frac{1}{\sqrt{h_1}}}{\frac{1}{\sqrt{h_1}} - \frac{1}{\sqrt{h_1}}}, \quad p_2(t) = \frac{\frac{1}{\sqrt{h_2(t)}} - \frac{1}{\sqrt{h_2}}}{\frac{1}{\sqrt{h_2}} - \frac{1}{\sqrt{h_2}}}$$

si ottiene

$$\begin{bmatrix} -\frac{A_1\sqrt{2g}}{S_1} \frac{1}{\sqrt{h_1}} & 0 \\ \frac{A_1\sqrt{2g}}{S_2} \frac{1}{\sqrt{h_1}} & -\frac{A_2\sqrt{2g}}{S_2} \frac{1}{\sqrt{h_2}} \end{bmatrix} = (p_1 * p_2)\Phi_1 + p_1 * (1 - p_2)\Phi_2 \\ + p_2 * (1 - p_1)\Phi_3 + (1 - p_1) * (1 - p_2)\Phi_4$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} -\frac{A_1\sqrt{2g}}{S_1} \frac{1}{\sqrt{h_1}} & 0 \\ \frac{A_1\sqrt{2g}}{S_2} \frac{1}{\sqrt{h_1}} & -\frac{A_2\sqrt{2g}}{S_2} \frac{1}{\sqrt{h_2}} \end{bmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{A_1\sqrt{2g}}{S_1} \frac{1}{\sqrt{h_1}} & 0 \\ \frac{A_1\sqrt{2g}}{S_2} \frac{1}{\sqrt{h_1}} & -\frac{A_2\sqrt{2g}}{S_2} \frac{1}{\sqrt{h_2}} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_3 = \begin{bmatrix} -\frac{A_1\sqrt{2g}}{S_1} \frac{1}{\sqrt{h_1}} & 0 \\ \frac{A_1\sqrt{2g}}{S_2} \frac{1}{\sqrt{h_1}} & -\frac{A_2\sqrt{2g}}{S_2} \frac{1}{\sqrt{h_2}} \end{bmatrix} \quad \Phi_4 = \begin{bmatrix} -\frac{A_1\sqrt{2g}}{S_1} \frac{1}{\sqrt{h_1}} & 0 \\ \frac{A_1\sqrt{2g}}{S_2} \frac{1}{\sqrt{h_1}} & -\frac{A_2\sqrt{2g}}{S_2} \frac{1}{\sqrt{h_2}} \end{bmatrix}$$

In questo caso inoltre

$$G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho S_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Sistemi nonlineari - MPC nonlineare

- Il paradigma politopico è utile anche quando lo stato non è misurabile.
- Si consideri un generico sistema nonlineare

$$\begin{cases} x(t+1) = \eta(x(t), u(t)) \\ y(t) = \psi(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1)$$

Si assuma che per ciascuna coppia  $(x, u)$  di valori ammissibili  $x \in \mathcal{X}$  e  $u \in \mathcal{U}$ , con  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{U}$  insiemi compatti, esista una funzione a valori matriciali  $F(x, u) \in \Omega(\mathcal{P})$  tale che

$$\begin{bmatrix} \eta(x, u) \\ \psi(x, u) \end{bmatrix} = F(x, u) \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

dove  $\Omega(\mathcal{P})$  denota un insieme politopico di matrici parametrizzate dal vettore  $p \in \mathcal{P}$ , con  $\mathcal{P}$  il simplex unitario.

Allora ogni proprietà (stabilità, prestazioni, soddisfacimento dei vincoli) assicurata al sistema lineare incerto (2)

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t) \end{bmatrix} \in \Omega(\mathcal{P}) \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

è assicurata anche per il sistema nonlineare (1).

- Le traiettorie del sistema nonlineare (1) sono state “immerse” fra quelle (a volte molto più numerose) del sistema lineare incerto (2).

## Sistemi misti - MPC robusti e gain-scheduling<sup>5</sup>

- In certe situazioni, si ottiene una descrizione politopica  $p(t) = [p_1'(t) \ p_2'(t)]'$  con  $p_1$  misurabile e conosciuto e  $p_2$  incerto. Ad esempio,  $p_1$  può rappresentare componenti dello stato misurabili e  $p_2$  parametri del sistema incerti.

---

<sup>5</sup>S.Dussy, L.El Ghaoui, "Robust gain-scheduling control of a class of nonlinear parameter-depended systems: application to an uncertain inverted pendulum", *Proceedings of the 1996 Control and Decision Conference*, Dearborn, MI, 1996.

## Controllo predittivo: schema concettuale di base <sup>6</sup>

### Ingredienti

- $u(t) \in \Omega_u, \forall t, \quad 0_u \in \Omega_u$  compatto e convesso ;
- $u(\cdot) = Fx(\cdot)$  ottima in senso LQ, cioè  $\min_F \sum_0^\infty \|y\|_{\Psi_y}^2 + \|u\|_{\Psi_u}^2$ ;
- $\Omega, 0_x \in \Omega$ , positivamente invariante sotto  $F$ ;
- $F\Omega \subset \Omega_u$ , cioè tutte le traiettorie ad anello chiuso sotto  $F$  che partono da un qualsiasi  $x(0) \in \Omega$  sono ammissibili;
- $u(\cdot|t) := \begin{cases} u^*(t+k|t) \text{ comandi liberi, } k=0, 1 \dots N-1 \\ Fx(t+k|t) & k \geq N \end{cases}$
- $x(t+k|t) := \Phi^k x(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-i-1} G u(t+i|t)$
- 

$$J(x(t), u^*(\cdot|t)) := \sum_{k=0}^{N-1} \left( \|y(t+k|t)\|_{\Psi_y}^2 + \|u^*(t+k|t)\|_{\Psi_u}^2 \right) + \|x(t+N|t)\|_P^2$$

dove  $P = P' \geq 0$  è la soluzione matriciale della ARE corrispondente;

### Algoritmo

1. In ciascun istante  $t \geq 0$ , dato  $x(t)$ , trova

$$u^o(\cdot|t) = \operatorname{argmin}_{u^*(\cdot|t)} J(x(t), u^*(\cdot|t))$$

subject to

$$u^*(t+k|t) \in \Omega_u \quad k=0, 1 \dots N-1$$

$$x(t+N|t) \in \Omega$$

2. Applica il comando

$$u(t) = u^o(t|t)$$

---

<sup>6</sup>P.O.M. Scokaert e J.B.Rawlings, "Infinite horizon linear quadratic control with constraints", *Proc. IFAC World Congress*, 109-114, San Francisco, 1996.

## Proprietà

**Stabilità** - Ok sotto la risolvibilità (in particolare non dipende da  $N$ ). Infatti, la legge di controllo predittivo precedente assicura stabilità esponenziale locale.

$$J(x(t+1), u^o(\cdot|t+1)) - J(x(t), u^o(\cdot|t)) \leq -\|y(t)\|_{\Psi_y}^2 - \|u(t)\|_{\Psi_u}^2$$

**Risolvibilità** - Ok, se esiste una soluzione LQ ammissibile. Infatti, questa è una soluzione ammissibile, anche se non ottima, per l'algoritmo di controllo predittivo precedente.

**Ottimalità** - Le prestazioni del controllo e la complessità numerica possono essere modulate scegliendo appropriatamente  $F$ ,  $N$  e gli altri parametri liberi nel costo.

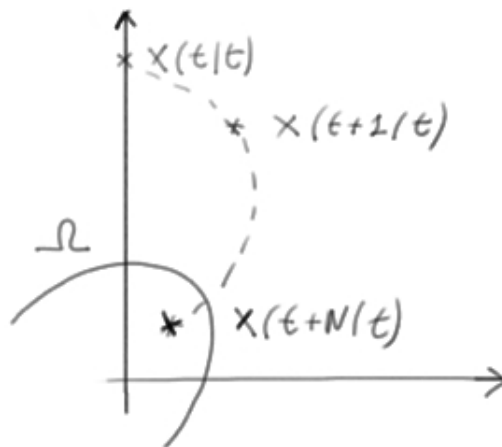


Figure 4: Problema di ottimizzazione

## Estensione: $F$ tempo-variante<sup>7</sup>

- $u(\cdot) = F_\rho x(\cdot)$  ottima in senso LQ parametrizzata da  $\rho$ , cioè  $\min_F \sum_0^\infty \|y\|_{\Psi_y}^2 + \rho \|u\|_{\Psi_u}^2, \forall \rho > 0$ ;

- $\Omega_\rho, 0_x \in \Omega_\rho$ , positivamente invariante sotto  $F_\rho$  con

$$\Omega_{\rho_1} \subset \Omega_{\rho_2} \text{ for } \rho_1 < \rho_2$$

- Esiste una regola di selezione per  $\rho$  ad ogni istante di tempo

$$\underline{\rho} \leq \rho(t+1) \leq \rho(t) \leq \rho(0)$$

tale che  $F_{\rho(t)}\Omega_{\rho(t)} \subset \Omega_u, \forall t \in \mathbb{Z}_+$ . Si osservi allora che  $\Omega_{\rho(t+1)} \subset \Omega_{\rho(t)}$ ;

- $u(\cdot|t) := \begin{cases} u^*(t+k|t) \text{ comandi liberi, } k=0, 1, \dots, N-1 \\ F_{\rho(t)}x(t+k|t) & k \geq N \end{cases}$

- $x(t+k|t) := \Phi^k x(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-i-1} G u(t+i|t)$

•

$$J(x(t), \rho(t), u^*(\cdot|t)) := \sum_{k=0}^{N-1} \left( \|y(t+k|t)\|_{\Psi_y}^2 + \underline{\rho} \|u^*(t+k|t)\|_{\Psi_u}^2 \right) + \|x(t+N|t)\|_{P_{\rho(t)}}^2$$

dove  $P_{\rho(t)}$  è la soluzione matriciale della ARE corrispondente;

---

<sup>7</sup>A.Casavola, M.Giannelli e E.Mosca, "Globally stabilizing predictive regulation of input-saturated linear system", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44:2226-2230, 1999.

## Algoritmo

1. A ciascun istante di tempo  $t \geq 0$ , dati  $x(t)$  e  $\rho(t)$ , trova

$$u^o(\cdot | t) = \operatorname{argmin}_{u^*(\cdot|t)} J(x(t), \rho(t), u^*(\cdot|t))$$

soggetto a

$$u^*(t + k|t) \in \Omega_u \quad k = 0, 1 \dots N - 1$$

$$x(t + N|t) \in \Omega_{\rho(t)}$$

2. Applica il comando all'impianto

$$u(t) = u^o(t | t)$$

3. Calcola  $\rho(t + 1)$  secondo

$$\rho(t + 1) := \operatorname{argmin}_{\rho > 0} \{ \Phi_{\rho(t)} x^o(t + N|t) \in \Omega_{\rho} \}$$

dove  $\Phi_{\rho} := \Phi + GF_{\rho}$  e  $x^o(t + N|t)$  è la predizione  $N$ -passi in avanti dello stato corrispondente alle sequenza di comandi ottima  $u^o(\cdot|t)$ .

## Proprietà

**Stabilità** - Ok sotto la risolvibilità. Maggiore contrazione rispetto al caso precedente.

$$\begin{aligned}
 & J(x(t+1), \rho(t+1), u^o(\cdot|t+1)) - J(x(t), \rho(t), u^o(\cdot|t)) \leq \\
 & -\|y(t)\|_{\Psi_y}^2 - \|u(t)\|_{\Psi_u}^2 - \|x^o(t+N|t)\|_{P_{\rho(t)} - P_{\rho(t+1)}}^2 \\
 & -[\rho(t) - \underline{\rho}]\|F_{\rho(t)}x^o(t+N|t)\|_{\Psi_u}^2
 \end{aligned}$$

**Risolvibilità** - La stessa dello schema precedente. Infatti,  $\rho(t) = \rho(0) \forall t$ , è una strategia di selezione ammissibile per  $\rho$ .

**Ottimalità** - Si ottengono migliori prestazioni per piccoli  $N$ . Per  $N$  elevati il vantaggio si riduce.  $F_\rho$  ha piccolo guadagno per stati “grandi” e guadagno elevato per stati “piccoli”. La complessità numerica dello schema è aumentata.

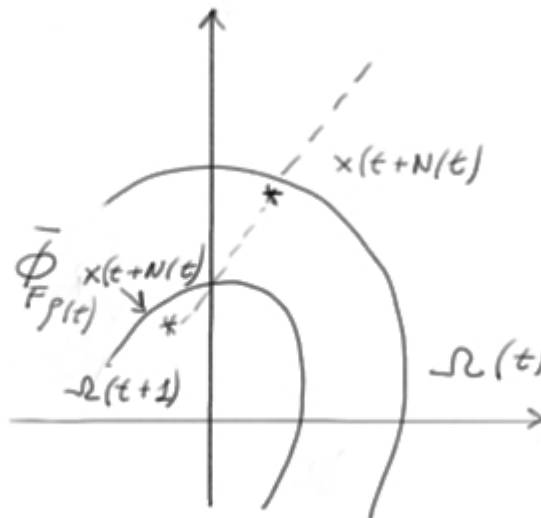


Figure 5: Aggiornamento di  $F$

## MPC robusto nel caso di incertezza politopica

$N = 0$

- M.V.Kothare, V.Balakrishnan, M.Morari, “Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities”, *Automatica*, 32:1361-1379, 1996.

$N = 1$

- B-G.Park, J-W.Lee, W.H.Kwon, “Robust one-step receding horizon control for constrained systems”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9:381-395, 1999.

$N > 0$

- J.Schuurmans e J.A.Rossiter, “Robust predictive control using tight sets of predicted states”, *IEE Proceed.: Control Theory and Applications*, 147:13-18, 2000.
- A.Casavola, M.Giannelli e E.Mosca, “Min-max predictive control strategies for input-saturated polytopic linear systems”, *Automatica*, 36:125-136, 2000

### Modifiche necessarie agli schemi precedenti

- Determinare una  $F$  robustamente stabilizzante;
- Determinare una regione  $\Omega$  robustamente invariante rispetto a  $F$ ;
- Caratterizzare il tubo delle predizioni  $\mathcal{X}_{u^*(\cdot|t)}^{t+k|t}(x)$ ;
- Determinare il vincolo terminale;
- Determinare un conveniente funzionale di costo;

## Scelta della $F$ robustamente stabilizzante

$$\begin{cases} x(t+1) &= \Phi(p(t))x(t) + G(p(t))u(t), & x(0) = x \\ y(t) &= H x(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Phi(p) &:= \sum_{i=1}^l p_i \Phi_i, & G(p) &:= \sum_{i=1}^l p_i G_i \\ p &= [p_1, p_2, \dots, p_l]' \in \mathbb{R}^l, & p \in \mathcal{P} &:= \{p \in \mathbb{R}^l : \sum_{i=1}^l p_i = 1, p_i \geq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_p(x, u(\cdot)) &:= \max_{p(\cdot)} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \|y(k)\|_{\Psi_y}^2 + \|u(k)\|_{\Psi_u}^2 \right) \\ \Psi_y &= \Psi'_y \geq 0, & \Psi_u &= \Psi'_u > 0, & \|v\|_{\Psi}^2 &:= v' \Psi v \end{aligned}$$

$$u(t) = Fx(t), \quad \bar{\Phi}_F(p) := \Phi(p) + G(p)F, \quad \forall p \in \mathcal{P}$$

**Teorema<sup>8</sup>** - Se esistono matrici  $Q = Q' > 0$  e  $F$  tali che

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}'_{F,i} Q \bar{\Phi}_{F,i} - Q + F' \Psi_y F + H' \Psi_u H &\leq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, l \\ \bar{\Phi}_{F,i} &:= \Phi_i + G_i F, \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned}$$

Allora

- $u(t) = Fx(t)$  è (robustamente) quadraticamente stabilizzante:

$$V(s) = s' Q s \implies \Delta V(s) = s' (\bar{\Phi}'_F(p) Q \bar{\Phi}_F(p) - Q) s \leq 0, \quad \forall p \in \mathcal{P},$$

- $J_p(x, Fx(\cdot)) \leq x' Q x, \quad \forall p(\cdot) \subset \mathcal{P}^*$

---

<sup>8</sup>M.V.Kothare, V.Balakrishnan, M.Morari, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities", *Automatica*, 32:1361-1379, 1996

## Regioni positivamente invarianti

- Ogni regione ellissoidale  $\mathcal{E}(Q, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^n : x'Qx \leq \rho\}$ , con  $\rho > 0$  arbitrario, è robustamente positivamente invariante sotto  $F$ :

$$x \in \mathcal{E}(Q, \rho) \implies \bar{\Phi}_F(p)x \subset \mathcal{E}(Q, \rho), \quad \forall p \in \mathcal{P}$$

- Una coppia  $(F, Q)$  è detta ammissibile rispetto al vincolo di saturazione  $u(t) \in \Omega_u, \forall t$ , se esiste un  $\rho > 0$  tale che

$$F\mathcal{E}(Q, \rho) \subset \Omega_u$$

## Come scegliere $Q, F$ e $\rho$ lungo le traiettorie del sistema

A ciascun passo  $t$  occorre determinare una tripla ammissibile  $[F(t), Q(t), \rho(t)]$  per lo stato corrente  $x(t)$ . È conveniente inoltre che la regione  $\mathcal{E}(Q(t), \rho(t))$  sia la più piccola possibile. Infatti, più piccola è la regione, più grande risulta il corrispondente guadagno di  $F(t)$ .

$$[F(t), Q(t), \rho(t)] := \operatorname{argmin}_{F, Q > 0, \rho > 0} \rho$$

$$(F, Q) \text{ q.s.}$$

$$x(t) \in \mathcal{E}(Q, \rho)$$

$$F\mathcal{E}(Q, \rho) \subset \Omega_u$$

## Proprietà

- Triple  $[F(t), Q(t), \rho(t)]$  ammissibili esistono a ogni istante  $t > 0$ , se ne esiste almeno una all'istante  $t = 0$ .
- $0_{n \times n} < Q(t+1) \leq Q(t)$  e  $0 < \rho(t+1) \leq \rho(t)$  per ogni  $t$ .
- Una scelta ammissibile è  $[F(t), Q(t), \rho(t)] = [F(0), Q(0), \rho(0)]$ . Coincide con la soluzione LQ ammissibile (low-gain)
- La determinazione si riconduce a risolvere un problema di ottimo con vincoli LMI.
- La precedente legge di aggiornamento coincide con lo schema di Kothare *et al.*<sup>9</sup> se usata in uno schema di controllo ad orizzonte recessivo (receding-horizon)

$$1. \quad [F(t), Q(t), \rho(t)] := \operatorname{argmin}_{F, Q > 0, \rho > 0} \rho$$

$$(F, Q) \text{ q.s.}$$

$$x(t) \in \mathcal{E}(Q, \rho)$$

$$F\mathcal{E}(Q, \rho) \subset \Omega_u$$

$$2. \quad \text{Applica } u(t) = F(t)x(t) \text{ all'impianto}$$

**N.B.** - Il precedente algoritmo non fa uso di nessun tipo di predizione. Corrisponde alla scelta  $N = 0$  dell'orizzonte di predizione

---

<sup>9</sup>M.V.Kothare, V.Balakrishnan, M.Morari, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities", *Automatica*, 32:1361-1379, 1996

## Insiemi degli stati raggiungibili in $k$ -passi

Per l'ottenimento di schemi MPC **convessi**, occorre considerare i convex-hull degli insiemi degli stati raggiungibili in  $k$ -passi.

Analizziamo prima la raggiungibilità sotto  $F$ .

$$x(t+1) \in \bar{\Phi}_F(p(t))x(t), \quad x(0) = x, \quad \bar{\Phi}_F(p) := \sum_{i=1}^l p_i \bar{\Phi}_{F,i}$$

$$x(0) = \{x\} =: \mathcal{X}_F^0(x)$$

$$\begin{aligned} x(1) &\in \left( \sum_{i=1}^l p_i \bar{\Phi}_{F,i} \right) x, \quad \text{Convesso} \\ &\in \text{co}\{\bar{\Phi}_{F,i}x, \forall i = 1, \dots, l\} =: \mathcal{X}_F^1(x) \end{aligned}$$

$$x(2) \in \bar{\Phi}_F(s)\bar{\Phi}_F(p)x, \quad \text{Convesso solo se } s \in \mathcal{P} \text{ e } p \in \mathcal{P} \text{ sono arbitrari}$$

Esempio - Si assuma  $p(t) = p \in [0, 1]$  costante, e  $\bar{\Phi}_F(p) = (p\Phi_1 + (1-p)\Phi_2)$

$$x(2) = (p\Phi_1 + (1-p)\Phi_2)^2 x = (p^2\Phi_1^2 + p(1-p)\Phi_1\Phi_2 + p(1-p)\Phi_2\Phi_1 + (1-p)^2\Phi_2^2) x$$

$$p \in [0, 1] \implies p(1-p) \in [0, \frac{1}{4}], \quad \rightarrow \text{non convesso}$$

$$x(2) \in (\beta_1\Phi_1^2 + \beta_2\Phi_1\Phi_2 + \beta_3\Phi_2\Phi_1 + \beta_4\Phi_2^2) x$$

$$\beta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^4 \beta_i = 1$$

$$x(2) \in \text{co}\{\bar{\Phi}_{F,j}\bar{\Phi}_{F,i}x, \forall i, j = 1, \dots, l\} =: \mathcal{X}_F^2(x)$$

$$x(k) \in \text{co}\{\bar{\Phi}_{F,i}z, \forall z \in \text{vert}\{\mathcal{X}_F^{k-1}(x), \forall i = 1, \dots, l\}\} =: \mathcal{X}_F^k(x)$$

Gli insiemi  $\mathcal{X}_F^k(x)$  sono politopi compatti e convessi per ogni  $k$ . Inoltre  $\mathcal{X}_F^k(x) \rightarrow 0_x$  per  $k \rightarrow \infty$ .

In genere vi è un certo grado di ridondanza nelle caratterizzazioni precedenti, cioè

$$\text{vert}\{\mathcal{X}_F^0(x)\} = \{x\}$$

$$\text{vert}\{\mathcal{X}_F^1(x)\} \subset \{\Phi_{F,i}x, \forall i = 1, \dots, l\}$$

$$\text{vert}\{\mathcal{X}_F^2(x)\} \subset \{\Phi_{F,i}\Phi_{F,j}x, \forall i, j = 1, \dots, l\}$$

## Insiemi degli stati raggiungibili lungo le predizioni

Dobbiamo caratterizzare gli insiemi degli stati raggiungibili (o meglio i loro convex-hull) per la seguente famiglia d'ingressi ammissibili

$$u(\cdot|t) := \begin{cases} u^*(t+k|t) \text{ comandi liberi, } & k = 0, 1 \dots N-1 \\ F(t)x(t+k|t), & k \geq N \end{cases}$$

$$u^*(t+k|t) \in \Omega_u, \quad k = 0, 1 \dots N-1$$

$$x(t|t) = x, \quad \mathcal{X}_{u^*}^{t|t}(x) = \{x\}$$

$$x(t+1|t) \in \{\Phi(p)x + G(p)u^*(t|t), \quad \forall p \in \mathcal{P}\}$$

$$= \text{co}\{\Phi_i x + G_i u^*(t|t), \quad \forall i = 1, \dots, l\} =: \mathcal{X}_{u^*}^{t+1|t}(x, u^*(\cdot|t))$$

$$x(t+2|t) \in \{\Phi(s)(\Phi(p)x + G(p)u^*(t|t)) + G(s)u^*(t+1|t), \quad \forall s, p \in \mathcal{P}\}$$

$$\subset \text{co}\{\Phi_j(\Phi_i x + G_i u^*(t|t)) + G_j u^*(t+1|t), \quad \forall i, j = 1, \dots, l\}$$

$$=: \mathcal{X}_{u^*}^{t+2|t}(x, u^*(\cdot|t))$$

$$x(t+k|t) \in \text{co}\{\Phi_i z + G_i u^*(t+k-1|t), \quad \forall z \in \text{vert}\{\mathcal{X}_{u^*}^{t+k-1|t}(x, u^*(\cdot|t))\},$$

$$\forall i = 1, \dots, l\} =: \mathcal{X}_{u^*}^{t+k|t}(x, u^*(\cdot|t))$$

Gli insiemi  $\mathcal{X}_{u^*}^{t+k|t}(x, u^*(\cdot|t))$  anche in questo caso sono politopi compatti e convessi per ogni  $k$ , parametrizzati da  $u^*(\cdot|t)$ .

Gli insiemi  $\mathcal{X}_{u^*}^{t+k|t}(x, u^*(\cdot|t))$  si riducono ai  $\mathcal{X}_F^k(x)$  quando  $u^*(\cdot|t) = Fx(\cdot)$ .

## Scelta del costo

### Caso senza incertezza

$$J(x, u(\cdot)) := \sum_{k=0}^{\infty} \|y(k)\|_{\Psi_y}^2 + \|u(k)\|_{\Psi_u}^2$$

- Sia  $u(t) = Fx(t)$  la soluzione ottima LQ. Allora

$$J(x, Fx(\cdot)) = \sum_{k=0}^{N-1} \|x(k)\|_{\Psi_F}^2 + \|x(N)\|_P$$

dove  $\Psi_F := H'\Psi_y H + F'\Psi_u F$  e  $P$  è la soluzione della ARE.

### Caso con incertezza<sup>10</sup>

$$J_p(x, u(\cdot)) := \max_{p(\cdot)} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \|y(k)\|_{\Psi_y}^2 + \|u(k)\|_{\Psi_u}^2 \right)$$

- Sia  $(Q, F)$  una coppia stabilizzante, cioè  $u(t) = Fx(t)$  è quadraticamente stabilizzante e  $J_p(x, Fx(\cdot)) \leq x'Qx$ . Allora

$$\begin{aligned} J_p(x, Fx(\cdot)) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \max_{z(k) \in \text{vert}\{\mathcal{X}_F^k(x)\}} \|z(k)\|_{\Psi_F}^2 \leq x'Qx \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \max_{z(k) \in \text{vert}\{\mathcal{X}_F^k(x)\}} \|z(k)\|_{\Psi_F}^2 + \max_{z \in \text{vert}\{\mathcal{X}_F^N(x)\}} \|z\|_Q^2 \end{aligned}$$

---

<sup>10</sup>A.Casavola, M.Giannelli e E.Mosca, "Min-max predictive control strategies for input-saturated polytopic linear systems", *Automatica*, 36:125-136, 2000

La precedente disuguaglianza si basa sul seguente risultato di analisi convessa

Sia  $f(x)$  una funzione convessa definita sul set  $\mathcal{X}$  convesso e chiuso. Allora

$$\max_{x \in \mathcal{X}} f(x) = \max_{x \in \text{vert}\{\mathcal{X}\}} f(x)$$

Si considera il seguente costo nel nostro schema MPC robusto (ad ogni passo  $t$ )

$$J(x(t), Q(t), u^*(\cdot|t)) := \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \max_{z(k) \in \text{vert}\{\mathcal{X}_{u^*}^{t+k|t}(x(t), u^*(\cdot|t))\}} \|z(k)\|_{H'\Psi_y H}^2 + \|u^*(t+k|t)\|_{\Psi_u}^2 \right\} + \max_{z \in \text{vert}\{\mathcal{X}_{u^*}^{t+N|t}(x(t), u^*(\cdot|t))\}} \|z\|_{Q(t)}^2$$

## Vincolo terminale

Per garantire la stabilità e la risolubilità ad ogni passo è necessario imporre il seguente vincolo terminale

$$\mathcal{X}_{u^*}^{t+N|t}(x(t), u^*(\cdot|t)) \subset \mathcal{E}(Q(t), \rho(t))$$

dove  $\mathcal{E}(Q(t), \rho(t))$  è il set ellissoidale robustamente positivamente invariante sotto  $F(t)$  e tale che  $F\mathcal{E}(Q(t), \rho(t)) \subset \Omega_u, \forall t$ .

Questo garantisce che ogni membro della famiglia

$$u(\cdot|t) := \begin{cases} u^*(t+k|t) \text{ comandi liberi, } & k = 0, 1 \dots N-1 \\ F(t)x(t+k|t), & k \geq N \end{cases}$$

$$u^*(t+k|t) \in \Omega_u, \quad k = 0, 1 \dots N-1$$

è ammissibile su tutto l'intervallo semi-infinito  $[t, \infty)$ .

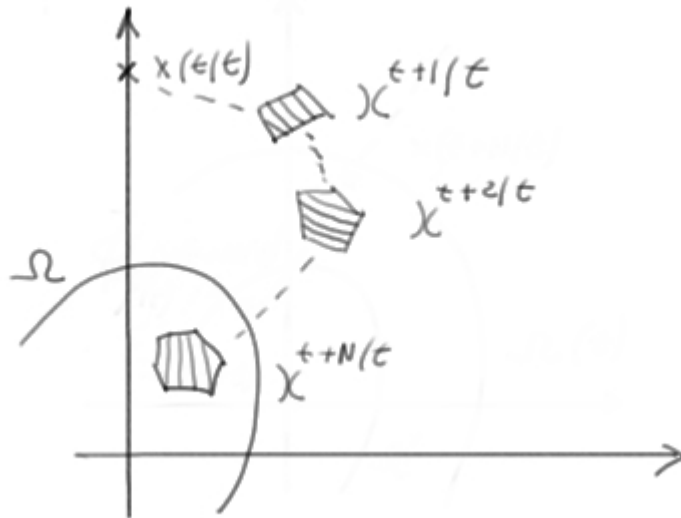


Figure 6: Insiemi degli stati raggiungibili e vincolo terminale

## Aggiornamento della tripla $[F(t), Q(t), \rho(t)]$

Ad ogni passo  $t$ , la scelta  $[F(t+1), Q(t+1), \rho(t+1)] = [F(t), Q(t), \rho(t)]$  è ammissibile. Tuttavia potrebbero esistere soluzioni  $[F(t+1), Q(t+1), \rho(t+1)]$  più convenienti. Cioè soluzioni tali che

$$\mathcal{E}(Q(t+1), \rho(t+1)) \subset \mathcal{E}(Q(t), \rho(t)) \Leftrightarrow F(t+1) \text{ ha un guadagno più grande di } F(t)$$

Questa eventualità è assicurata se, al tempo  $t$ , esiste una tripla  $[F(t+1), Q(t+1), \rho(t+1)]$  tale che

$$\bar{\Phi}_{F(t), i} z \in \mathcal{E}(Q(t+1), \rho(t+1)), \quad \forall z \in \text{vert}\{\mathcal{X}_{u^*}^{t+N|t}(x(t), u^*(\cdot|t))\}, \quad \forall i = 1, \dots, l$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(Q(t+1), \rho(t+1)) &\subset \mathcal{E}(Q(t), \rho(t)) \\ F(t+1)\mathcal{E}(Q(t+1), \rho(t+1)) &\subset \Omega_u \end{aligned}$$

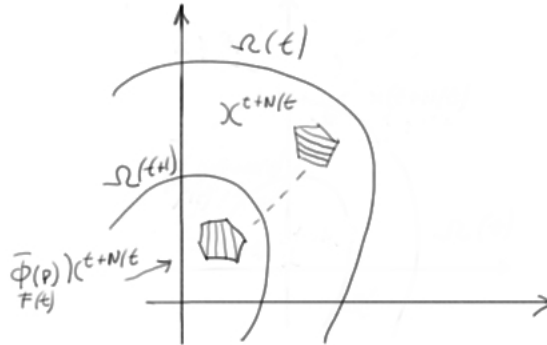


Figure 7: Aggiornamento della tripla  $[F(t), Q(t), \rho(t)]$

## MPC robusto

1. Ad ogni passo  $t \geq 0$ , dati  $x(t)$ ,  $Q(t)$  e  $\rho(t)$ , trova

$$u^o(\cdot | t) = \operatorname{argmin}_{u^*(\cdot|t)} J(x(t), Q(t), u^*(\cdot|t))$$

soggetto a

$$u^*(t + k|t) \in \Omega_u, \quad \forall k = 0, 1 \dots N - 1$$

$$z \in \mathcal{E}(Q(t), \rho(t)), \quad \forall z \in \operatorname{vert}\{\mathcal{X}_{u^*}^{t+N|t}(x(t), u^*(\cdot|t))\}$$

2. Applica all'impianto il comando

$$u(t) = u^o(t | t)$$

3. Ad ogni passo  $t \geq 0$ , dati  $x(t)$ ,  $F(t)$  e  $u^o(\cdot|t)$ , trova

$$[F(t + 1), Q(t + 1), \rho(t + 1)] := \operatorname{argmin}_{F, Q > 0, \rho > 0} \rho$$

soggetto a

$$(F, Q) \text{ q. s.}$$

$$\bar{\Phi}_{F(t), i} z \in \mathcal{E}(Q, \rho), \quad F\mathcal{E}(Q, \rho) \subset \Omega_u$$

$$\forall i = 1, \dots, l, \quad \forall z \in \operatorname{vert}\{\mathcal{X}_{u^*}^{t+N|t}(x(t), u^o(\cdot|t))\};$$

**N.B.** - I passi 1. e 3. possono essere risolti contemporaneamente. Nel passo 3. la scelta  $[F(t), Q(t), \rho(t)] = [F(0), Q(0), \rho(0)] \quad \forall t$  può essere adottata per ridurre la complessità computazione. Tuttavia si ottengono prestazioni peggiori. <sup>11</sup>

---

<sup>11</sup>A.Casavola, M.Giannelli e E.Mosca, "Min-max predictive control strategies for input-saturated polytopic linear systems", *Automatica*, 36:125-136, 2000

## Proprietà

**Stabilità** - Ok sotto la risolvibilità. Infatti,

$$J(x(t+1), Q(t+1), u^o(\cdot|t+1)) - J(x(t), Q(t), u^o(\cdot|t)) \leq \\ -\|y(t)\|_{\Psi_y}^2 - \|u(t)\|_{\Psi_u}^2 - \max_{i \in \underline{L}, z \in \text{vert}\{\mathcal{X}_u^{t+N|t}(x(t), u^o(\cdot|t))\}}} \|\bar{\Phi}_{F(t),i} z\|_{[Q(t)-Q(t+1)]}^2$$

**Risolvibilità** - La stessa dello schema base (senza incertezza) se il sistema politopico è asintoticamente stabile in anello aperto. Altrimenti occorre prestabilizzarlo, ad esempio con una legge di controllo robusta.<sup>12</sup>

**Optimalità** - Le prestazioni del controllo aumentano all'aumentare di  $N$ .

---

<sup>12</sup>J.Schuurmans e J.A.Rossiter, "Robust predictive control using tight sets of predicted states", *IEE Proceed.: Control Theory and Applications*, 147:13-18, 2000.

## MPC robusto - Un esempio

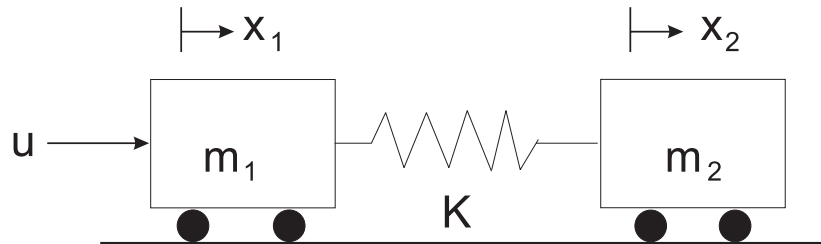


Figure 8: Esempio di sistema incerto. La costante elastica  $K$  è incerta,  $0.25 \leq K \leq 1$

- Risposta al gradino unitario da stato iniziale nullo, con  $\Psi_y = \Psi_u = 1$ . A regime si vuole che  $x = [1 \ 1 \ 0 \ 0]'$ . Si può convertire in un problema di regolazione partendo da stato iniziale  $x(0) = [-1 \ -1 \ 0 \ 0]'$ .
- Incertezza  $0.25 \leq K \leq 1$ .
- $m_1 = m_2 = 1$  e  $K = 0.65$  durante le simulazioni.
- Vincolo di saturazione  $|u(t)| \leq 0.1$

### Confronti

- Algoritmo completo
- Algoritmo senza l'aggiornamento di  $[F(t), Q(t), \rho(t)]$ . Cioè,  $[F(t), Q(t), \rho(t)] = [F(0), Q(0), \rho(0)], \forall t$ .

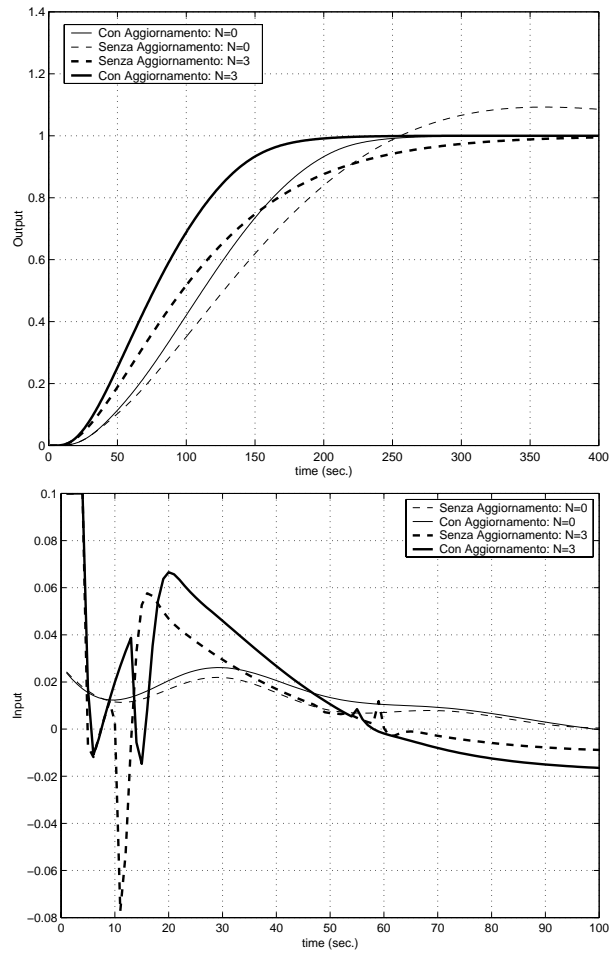


Figure 9: MPC robusto per  $N=0$  (sottile) e  $N=3$  (spesso). (Alto) uscita  $x_2(t)$  (Basso) ingresso  $u(t)$ . MPC con aggiornamento (Continuo), MPC senza aggiornamento (tratteggio).

	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$
MPC senza aggiornamento	56	3.498	10.928	29.839
MPC con aggiornamento	5.460	11.187	19.452	43.309

Table 1: Flop per passo

## MPC gain-scheduling - Un esempio

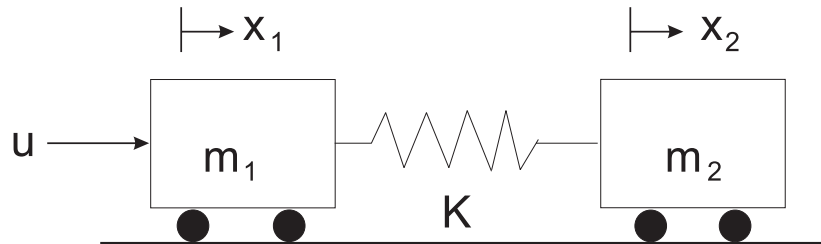


Figure 10: Esempio di sistema LPV. La costante elastica  $K$  è misurabile

- Inseguimento di un riferimento sinusoidale, con  $\Psi_y = \Psi_u = 1$ . Si utilizza un modello incrementale per convertire il problema servo in un problema di regolazione.<sup>13</sup>
- Si assume:  $0.25 \leq K(t) \leq 1$  e  $\|K(t+1) - K(t)\| \leq 0.01$ .
- $m_1 = m_2 = 1$  e  $K = 0.65$  durante le simulazioni.
- Vincolo di saturazione:  $|u(t+1) - u(t)| \leq 0.7$

### Confronti

- MPC robusto con aggiornamento. Non è risolvibile per vincoli più stretti di  $|u(t+1) - u(t)| \leq 0.7$ .
- MPC gain-scheduling con aggiornamento. È risolvibile fino a  $|u(t+1) - u(t)| \leq 0.2$ . Le predizioni sono calcolate tenendo conto dell'informazioni disponibile su  $K(t)$ .<sup>14</sup>

---

<sup>13</sup>K. Takaba. "Robust servomechanism with preview action for polytopic uncertain systems", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10:101-111, 2000.

<sup>14</sup>A.Casavola, D.Famularo, G.Franzè, "A scheduling minmax predictive control algorithm for LPV systems subject to bounded rate of change of parameters", *IEEE Transaction on Automatic Control*, in stampa.

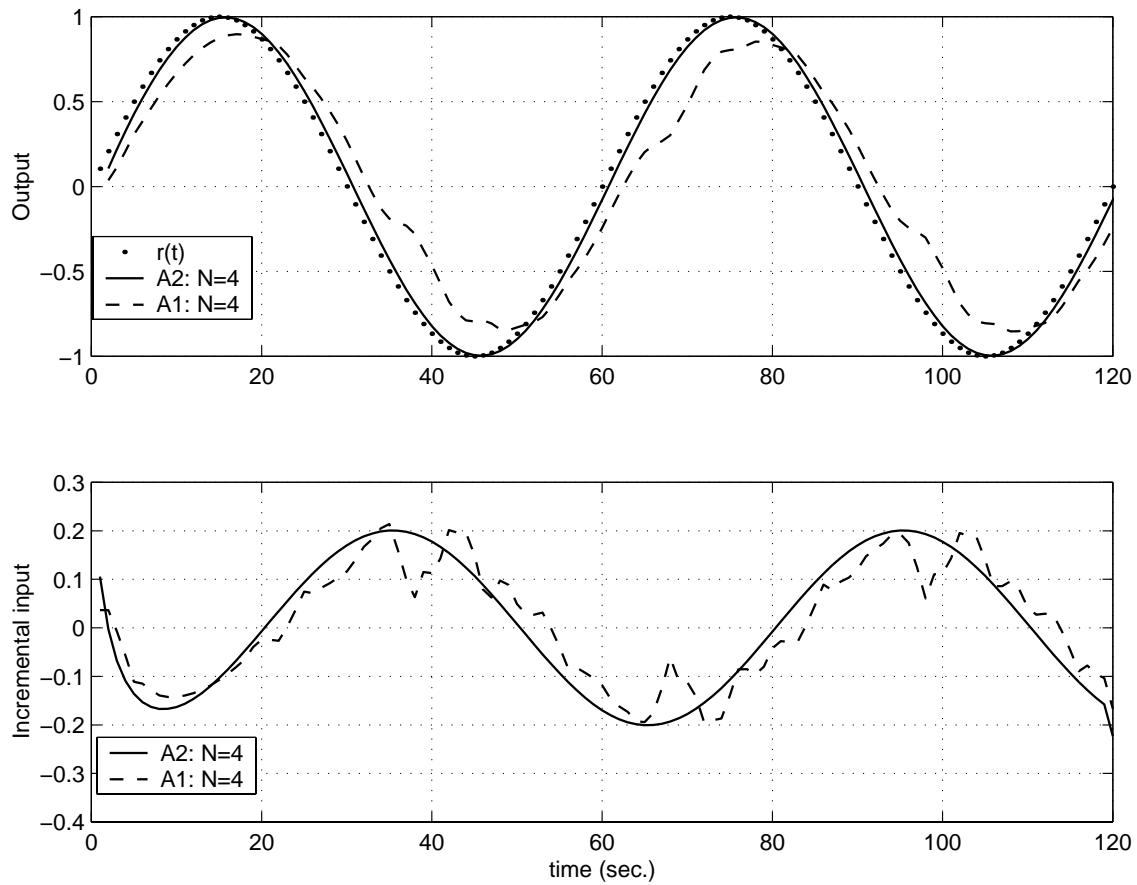


Figure 11: Esempio di sistema LPV. Confronti fra MPC robusto (A1) e MPC gain-scheduling (A2).  $N = 4$  in entrambi i casi.

MPC gain-scheduling A2: $N=4$	105.568
MPC robusto A1: $N=4$	153.161

Table 2: Flop per passo

## MPC nonlineare - Un esempio

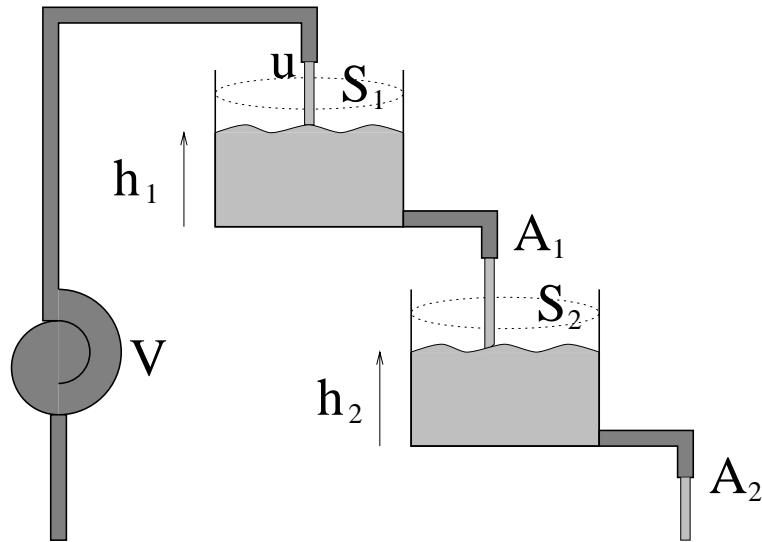


Figure 12: Esempio di sistema nonlineare

- Inseguimento di un gradino. L'uscita è  $h_2$ , l'ingresso la tensione  $V$  alla pompa. Si devono gestire anche anche vincoli sullo stato<sup>15</sup>

- Vincoli:

$$0.01(m) \leq h_1(t) \leq 0.4(m)$$

$$0.1(m) \leq h_2(t) \leq 2(m)$$

$$0 \leq V(t) \leq 4(Volt)$$

- Tutti gli altri parametri del sistema sono riportati nel lavoro citato a piè di pagina.
- MPC robusto completo con vincoli sullo stato

$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$
9010	16048	46798

Table 3: Flop per passo

<sup>15</sup>D.Angeli, A.Casavola, E.Mosca, "Constrained predictive control of nonlinear plants via polytopic linear system embedding", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10:1091-1103, 2001.

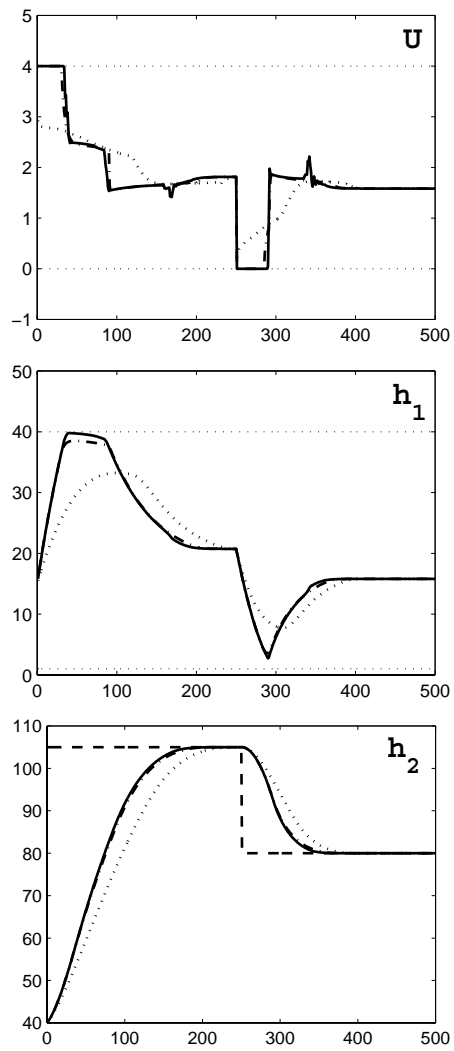


Figure 13: MPC robusto per  $N=0$  (punti-spessi),  $N=1$  (punto-linea) e  $N=2$  (continua): (sopra) l'ingresso  $u(t)$ , (centro) lo stato  $h_1$ , (basso) lo stato  $h_2$  e il riferimento  $r(t)$  (tratteggio). I vincoli sono indicati con (punti-leggeri).

## Problemi aperti

- **Stabilità solo quadratica**<sup>16</sup> - La stabilità che si riesce a garantire è solo quadratica. La soluzione può essere arbitrariamente conservativa nel caso di incertezza tempo-invariante.

$$\underbrace{\max_{p(\cdot)} \min_{u(\cdot)} J(x, u(\cdot), p(\cdot))}_{\text{stabilità robusta}} \leq \underbrace{\min_{u(\cdot)} \max_{p(\cdot)} J(x, u(\cdot), p(\cdot))}_{\text{stabilità quadratica}}$$

- **Predizioni ad anello aperto** - Facendo predizioni ad anello aperto si sovrastima l'effetto dell'incertezza. Non si tiene conto della presenza del controllo MPC che ne riduce l'effetto. Una proposta<sup>17</sup> per effettuare predizioni ad anello chiuso consiste nello scegliere come vertici

$$\bar{\Phi}_i := \Phi_i + G_i F(0), \quad G_i$$

La legge  $F(0)$  è calcolata al passo  $t = 0$  e non più aggiornata.

- **Complessità numerica** - Il maggior difetto di questo tipo di approcci sta nell'elevata complessità numerica (soprattutto quella spaziale, relativa all'occupazione di memoria, che cresce esponenzialmente con  $N$ ).

---

<sup>16</sup>W-H Chen, "On relationship between quadratic and robust stability of uncertain systems", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9:51-58, 1999

<sup>17</sup>L.Chisci,P.Falugi,G.Zappa, "Predictive control for constrained systems with polytopic uncertainty", Proc. *American Control Conference 2001*, Arlington, USA, Giugno 2001.