Introduzione ai sistemi dinamici

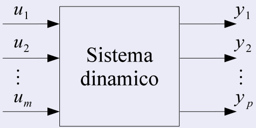
Dipartimento di Ingegneria Industriale e dell'Informazione (DIII)
Università degli Studi di Pavia

Fondamenti di Automatica

Variabili di un sistema dinamico

Variabili di ingresso e uscita

- Variabili di ingresso (o ingressi): $u_1(t) \in \mathbb{R}, u_2(t) \in \mathbb{R}, \ldots, u_m(t) \in \mathbb{R}$.
  m: numero di ingressi
- Variabili di uscita (o uscite): $y_1(t) \in \mathbb{R}, y_2(t) \in \mathbb{R}, \ldots, y_p(t) \in \mathbb{R}$.
  p: numero di uscite



Osservazione

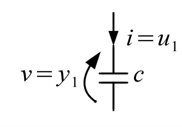
- Ingressi/uscite = interfaccia col resto del mondo
- Ingressi = cause. Uscite = effetti. Ma non necessariamente ingresso = afflusso (di massa, energia ...) o uscita = efflusso

Variabili di un sistema dinamico

Problema

Sia $t_0 \in \mathbb{R}$ un istante iniziale e $t \geq t_0$. Basta conoscere $u_1, \ldots, u_m$ tra t_0 e t per calcolare $y_1(t), \ldots, y_p(t)$? In generale NO

Esempio:



$\dot{y}_1 = \dfrac{u_1}{c} \Rightarrow$ bisogna conoscere $y_1(t_0)$ per calcolare $y_1(t)$

Variabili di stato (o stati)

Variabili del processo la cui conoscenza all'istante t_0 unita a quella degli ingressi tra t_0 e t permette di calcolare $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_p(t)$

- Stati: $x_1(t) \in \mathbb{R}, x_2(t) \in \mathbb{R}, \ldots, x_n(t) \in \mathbb{R}$.
  $n =$ numero di stati $=$ *ordine del sistema*

Equazioni di un sistema dinamico

Equazioni di stato

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t)
\end{aligned}
$$

- Sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Incognite = stati. Gli ingressi sono fissati.
- Dato $t_0 \in \mathbb{R}$, bisogna specificare gli stati iniziali $x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)$ al fine di calcolare gli stati per $t \geq t_0$
- Gli argomenti delle funzioni $f_1, , \ldots, f_n$ sono, al più, stati, ingressi e tempo

Equazioni di un sistema dinamico

Trasformazioni di uscita

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\
y_2(t) &= g_2(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\
&\vdots \\
y_p(t) &= g_p(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t)
\end{aligned}
$$

- Equazioni algebriche
- Le uscite al tempo t possono essere calcolate a partire da stati e ingressi allo stesso istante di tempo
- Gli argomenti delle funzioni $g_1, , \ldots, g_p$ sono, al più, stati, ingressi e tempo

Notazione vettoriale

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

$$f(x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x(t), u(t), t) \end{bmatrix}, \; g(x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} g_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ g_p(x(t), u(t), t) \end{bmatrix}$$

Sistema dinamico

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

Movimento di stato

Definizione

Il *movimento di stato* generato da

$$x(t_0) = x_0 \text{ e } u(t),\ \forall t \geq t_0$$

è la soluzione $x(t)$, $\forall t \geq t_0$, delle equazioni di stato. Il corrispondente *movimento d'uscita* è la funzione $y(t)$, $\forall t \geq t_0$, calcolata tramite le trasformazioni d'uscita.

Notazione

$$x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u)$$

ove ϕ è detta *funzione di transizione*.

Classi di sistemi dinamici

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \qquad & x(t) \in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) & u(t) \in \mathbb{R}^m \\ x(t_0) &= x_0, \;\; t \geq t_0 & y(t) \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

- Sistema *SISO* (Single-Input Single-Output) se $m = p = 1$. Sistema *MIMO* (Multi-Input Multi-Output) altrimenti.
- Sistema *strettamente proprio* se g non dipende da u. Se no, *proprio*
- Sistema *statico* se g non dipende da x
  - descritto dalle sole trasformazioni di uscita $y(t) = g(u(t), t)$. Si può assumere $n = 0$.

Classi di sistemi dinamici

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \qquad u(t) \in \mathbb{R}^m$$
$$x(t_0) = x_0 \qquad y(t) \in \mathbb{R}^p$$

- Sistema tempo-invariante se f e g non dipendono esplicitamente da t

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Classi di sistemi dinamici

Sistema tempo-invariante

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Proprietà chiave

Siano

- $t_1 > t_0$ e $\Delta t = t_1 - t_0$
- $x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u)$ e $y(t)$ il movimento d'uscita corrispondente
- $\tilde{x}(t) = \phi(t, t_1, x_0, \tilde{u})$, ove $\tilde{u}(t) = u(t - \Delta t)$, $t \geq t_1$ e $\tilde{y}(t)$ il movimento d'uscita corrispondente

Allora $\tilde{x}(t) = x(t - \Delta t)$ e $\tilde{y}(t) = y(t - \Delta t)$

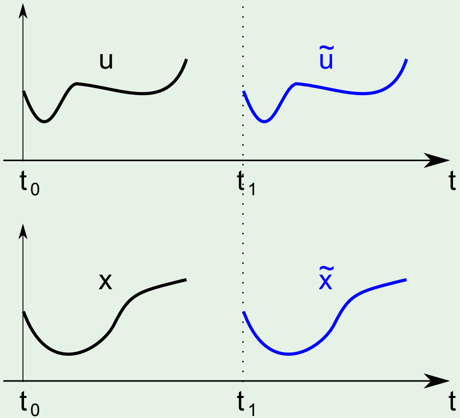
Conseguenza

L'istante iniziale non modifica le proprietà delle traiettorie. Non è limitativo assumere $t_0 = 0$.

Classi di sistemi dinamici

Sistema tempo-invariante

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = g(x(t), u(t))$$



Classi di sistemi dinamici

Sistema lineare

Un sistema è lineare se f e g sono funzioni lineari in x e u

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad A(t),\ B(t),\ C(t),\ D(t) \text{ matrici}$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Sistema Lineare Tempo Invariante (LTI)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad A,\ B,\ C,\ D \text{ matrici}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Classi di sistemi dinamici

Sistemi a dimensione infinita

- I sistemi precedenti sono anche detti *a dimensione finita (o a parametri concentrati)* perchè $x(t)$ è costituito da $n < +\infty$ componenti
- Un sistema è *a dimensione infinita (o a parametri distribuiti)* se lo stato è $x(t, \xi)$ ove $\xi \in \mathbb{R}^q$ sono parametri addizionali
  - Usualmente le equazioni di stato sono equazioni differenziali alle derivate parziali $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_q}$

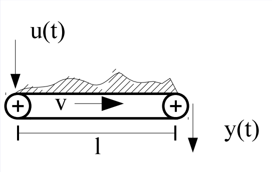
Classi di sistemi dinamici

Un sistema a dimensione infinita

Il *ritardo di tempo* è il sistema SISO descritto dalla relazione *di ingresso-uscita*

$$y(t) = u(t - \tau), \quad \tau > 0$$

Esempio: nastro trasportatore che si muove con velocità costante v



ove $u(t)$ e $y(t)$ sono le portate di sabbia in ingresso e uscita $\Rightarrow \tau = \frac{l}{v}$.

Stato: densità di sabbia $x(t, \xi_1)$ in ogni punto ξ_1 del nastro.

- Fenomeno di trasporto: stato e ingresso sono legati da un'equazione differenziale alle derivate parziali