Trasformata di Laplace

- $F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$, $f(t)$ definita per $t \geq 0$
- Ha successo se $\exists$s per cui F(s), converge $Re(s) > \bar{\sigma}$ ($\bar{\sigma}$ ascissa di convergenza)
- Antitrasformata $f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\, e^{st}ds$, σ qualunque numero reale $> \bar{\sigma}$
  - $f(t)$ =0, $t \leq 0$
- Per funzioni nulle per tempi negativi la corrispondenza è biunivoca

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)],\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

Trasformata di Laplace

- $\mathfrak{L}[imp(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} imp(t)e^{-st}dt = e^{-s0} = 1$
- $\mathfrak{L}[sca(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} sca(t)e^{-st}dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^{+\infty} = \left[\frac{e^{-\sigma t}}{-(\sigma+j\omega)}(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\right]\Big|_0^{+\infty} =$
  - Converge per $\sigma > 0$ ($\bar{\sigma}$=0) $\mathfrak{L}[sca(t)] = \frac{0-1}{-(\sigma+j\omega)} = \frac{1}{s}$ ($F(s)$ definita per $s \neq 0$)

Proprietà

1. Linearità $\mathfrak{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$
2. Traslazione nel tempo $\mathfrak{L}[f(t-\tau)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt = e^{-\tau s}\int_{\tau^-}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt$

   Definisco $k = t - \tau$ → $\mathfrak{L}[f(k)] = e^{-\tau s}\int_{0^-}^{+\infty} f(k)e^{-sk}dk = e^{-\tau s}F(s)$

Trasformata di Laplace

3. Traslazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}[\cos(wt)\, sca(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt}+je^{-jwt}}{2} sca(t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt}}{2} sca(t)\right] + \mathcal{L}\left[\frac{je^{-jwt}}{2} sca(t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-jw} + \frac{j}{s+jw}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+jw+s-jw}{s^2+w^2}\right] = \frac{s}{s^2+w^2} \quad (\bar{\sigma}=0)$$

4. Derivazione nel dominio del tempo

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} \dot{f}(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}|_0^{+\infty} + \int_{0^-}^{+\infty} sf(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0^-) \quad (\bar{\sigma}=0)$$

Analogamente $\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$

Generalizzando $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1} f(t)}{dt^{i-1}}\Big|_{t=0}$

Trasformata di Laplace

Siccome $\frac{d}{dt}\left(\cos(wt)\, sca(t)\right) = -wsin(wt)sca(t) + \cos(wt)\, imp(t) = -wsin(wt)sca(t) + imp(t)$

Allora $\mathfrak{L}[\sin(wt)sca(t)] = \mathfrak{L}\left[\frac{1}{w}\left(imp(t) - \frac{d}{dt}\left(\cos(wt)\, sca(t)\right)\right)\right] = \frac{1}{w}\left(1 - s\frac{s}{s^2+w^2} + \cos(0^-)\, sca(0^-)\right)$

$$= \frac{1}{w}\left(1 - s\frac{s}{s^2+w^2}\right) = \frac{1}{w}\left(\frac{s^2+w^2-s^2}{s^2+w^2}\right) = \frac{w}{s^2+w^2}$$

5. Derivazione nel dominio della variabile complessa

$$-\frac{dF(s)}{ds} = -\int_{0^-}^{+\infty} f(t)\frac{de^{-st}}{ds}dt = -\int_{0^-}^{+\infty} -tf(t)e^{-st}dt = \mathfrak{L}[tf(t)]$$

6. Integrazione nel dominio del tempo

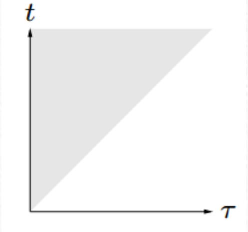
$$\mathfrak{L}\left[\int_{0^-}^{t} f(t)\, dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

Trasformata di Laplace

- $\mathfrak{L}\left[\int_{0^-}^{t} f(t)\,dt\right]=\int_{0^-}^{+\infty}\int_{0^-}^{t}(f(\tau)d\tau)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{+\infty}\int_{0^-}^{t} f(\tau)e^{-st}d\tau\,dt$

  Qui stiamo integrando prima orizzontalmente sul triangolo $0 \leq \tau \leq t$

  Invertendo l'ordine, ossia integrando prima verticalmente, si ottiene:



$$\mathfrak{L}\left[\int_{0^-}^{t} f(t)\,dt\right] = \int_{\tau=0^-}^{+\infty}\int_{t=\tau}^{+\infty} f(\tau)e^{-st}\,dtd\tau = \int_{\tau=0^-}^{+\infty} f(\tau)\int_{t=\tau}^{+\infty}(e^{-st}\,dt)d\tau = \int_{\tau=0^-}^{+\infty} f(\tau)\frac{1}{s}e^{-s\tau}d\tau$$

$$= \frac{1}{s}F(s)$$

7. Convoluzione

$$\mathfrak{L}[f_1(t) * f_2\,(t)] = \int_{0^-}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{+\infty}\int_{\tau=0^-}^{t} e^{-st}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\,dt$$

Come prima cambiamo l'ordine d'integrazione $=\int_{\tau=0}^{+\infty}\int_{t=\tau}^{t} e^{-st}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\,dt$ e introduco $\bar{t} = t-\tau$

$$\int_{\tau=0}^{+\infty}\int_{\bar{t}=0}^{+\infty} e^{-s(\bar{t}+\tau)}\,f_1(\tau)f_2(\bar{t})d\bar{t}d\tau = \left(\int_{\tau=0}^{+\infty} e^{-s\tau}\,f_1(\tau)\right)d\tau\left(\int_{\bar{t}=0}^{+\infty} e^{-s\bar{t}}f_2(\bar{t})d\bar{t}\right) = F_1(s)F_2(s)$$

Trasformata di Laplace

8. **Teorema del valore iniziale:** se una funzione reale *f* ha trasformata **razionale** *F(s)* con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore (vale sotto large ipotesi anche se F non razionale, purchè $f(0^+)$ esista) allora

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

9. **Teorema del valore finale:** se una funzione reale *f* ha trasformata razionale con grado del denominatore maggiore del numeratore e radici del denominatore (poli) **nell'origine e o a parte reale negativa**, allora

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

(vale sotto large ipotesi anche se F non razionale, purché $\lim_{t\to\infty} f(t)$ esista)

Nota: affinchè il teorema del valore finale sia applicabile è necessario che $\lim_{t\to\infty} f(t)$ esista. Per questo motivo non è applicabile al caso di poli complessi coniugati a parte realeh nulla (cui corrisponde un andamento oscillatorio)