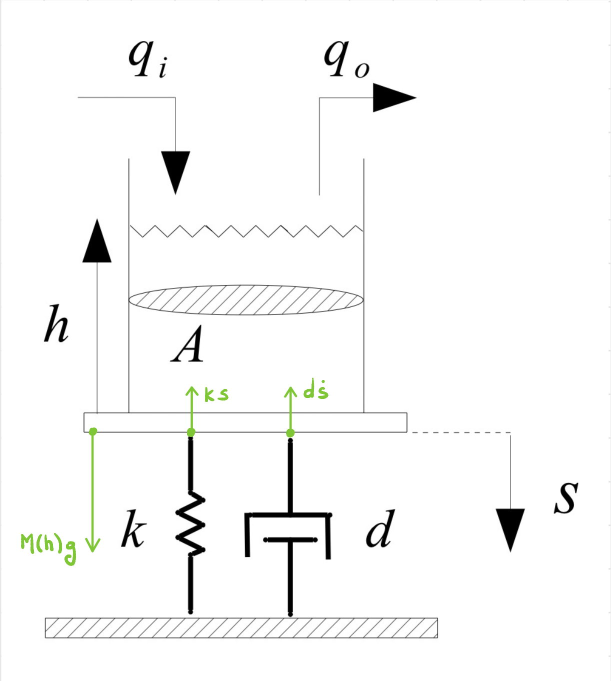
Fondamenti di Automatica
Esame 21 Giugno 2021

Es 1: Si ricavino le equazioni del sistema dinamico complessivo avente come uscite il volume d'acqua nella vasca e la posizione s(t).



Definiamo le variabili di stato e di controllo:

$x_1 := s$, $x_2 := \dot{s}$, $x_3 := h$

$u_1 := q_i$, $u_2 := q_o$

Definiamo inoltre la massa di liquido contenuta nella vasca e funzione del livello $h = x_3$:

$M(x_3) : \quad \rho A x_3$

Le equazioni del sistema dinamico sono :

$$\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
\overset{\overset{4x_3}{\shortparallel}}{M(x_3(t))}\, \dot{x}_2(t) = \overset{\overset{4x_3}{\shortparallel}}{M(x_3(t))}\, \overset{\overset{9.81}{\shortparallel}}{g} - \overset{\overset{2}{\shortparallel}}{k}\, x_1(t) - \overset{\overset{3}{\shortparallel}}{d}\, x_2(t)
\end{array}\right\} \text{sistema meccanico} \\
\left.\begin{array}{l}
\overset{\overset{1}{\shortparallel}}{A}\, \dot{x}_3(t) = u_1(t) - u_2(t)
\end{array}\right\} \text{sistema idraulico} \\
y_1(t) = \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{A}\, x_3(t) \\
y_2(t) = x_1(t)
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{x_1(t)}{x_3(t)} - \dfrac{3}{4}\dfrac{x_2(t)}{x_3(t)} + 9.81 \\
\dot{x}_3(t) = u_1(t) - u_2(t) \\
y_1(t) = x_3(t) \\
y_2(t) = x_1(t)
\end{array}\right.$$

Es 2: Si consideri il sistema LTI:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - u_1 \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

(a) Determinare le f.d.t.:

$$\begin{cases} sX_1 = -3X_1 + U_1 \\ sX_2 = X_1 + X_2 - U_1 \\ Y = X_1 - X_2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad X_1 = \frac{U_1}{s+3}$$

$$\longrightarrow \quad X_2 = \frac{X_1 - U_1}{s-1} = \frac{U_1}{(s+3)(s-1)} - \frac{U_1}{(s-1)} = -\frac{U_1(s+2)}{(s+3)(s-1)}$$

$$G(s) = \frac{Y}{U_1} = \frac{1}{s+3} + \frac{s+2}{(s+3)(s-1)} = \frac{2s+1}{(s+3)(s-1)}$$

(b) Indicare il valore di regime dell'uscita a fronte di un ingresso a scalino:

Il teorema del valore finale NON può essere applicato perché $G(s)$ è instabile (un polo in $s=1$).

(c) Determinare il valore di uscita per $t=1$ a fronte di un ingresso $u_1(t) = 2\,\text{sca}(t)$:

Applico il metodo di Heaviside :

$$Y(s) = \frac{4s+2}{s(s+3)(s-1)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+3} + \frac{\alpha_3}{s-1}$$

$$4s+2 = \alpha_1 (s+3)(s-1) + \alpha_2 s (s-1) + \alpha_3 s (s+3)$$

$$s=0 \longrightarrow 2 = -3\alpha_1 \longrightarrow \alpha_1 = -2/3$$

$$s=-3 \longrightarrow -10 = 12\alpha_2 \longrightarrow \alpha_2 = -5/6$$

$$s=1 \longrightarrow 6 = 4\alpha_3 \longrightarrow \alpha_3 = 3/2$$

$$y(t) = -\frac{2}{3} - \frac{5}{6} e^{-3t} + \frac{3}{2} e^{t}$$

$$y(1) = -\frac{2}{3} - \frac{5}{6} e^{-3} + \frac{3}{2} e \cong 3.37$$

Es. 3: Si consideri il sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos^2(x_1) - \cos(u) + \sin^2(u) \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 \\ y = x_1 x_2 u \end{cases}$$

(a) Per $u(t) = \bar{u} = 0$, si determinino tutti gli stati di equilibrio aventi x_1 e x_2 compresi tra 0 e 2π (escluso)

$$\begin{cases} 0 = \cos^2(\bar{x}_1) - 1 & \longrightarrow \quad \cos^2(\bar{x}_1) = 1 \\ 0 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ \bar{y} = 0 \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono:

$$P_1 : \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, 0 \right) \qquad 0 \leq \alpha < 2\pi$$

$$P_2 : \left(\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right)$$

(b) Si ricavino i sistemi linearizzati nell'intorno degli equilibri aventi $x_2 = 0$:

Consideriamo quindi i seguenti punti di equilibrio:

$$P_1 : \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right) \quad e \quad P_2 : \left(\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right)$$

Sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 = -2\cos(\bar{x}_1)\sin(\bar{x}_1)\,\delta x_1 + \sin(\bar{u})\,\delta u + 2\sin(\bar{u})\cos(\bar{u})\,\delta u \\ \delta \dot{x}_2 = \bar{x}_2\,\delta x_1 + \bar{x}_1\,\delta x_2 \\ \delta y = 0 \end{cases}$$

Se linearizziamo nell'intorno di P_1 otteniamo:

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 = 0 \\ \delta \dot{x}_2 = 0 \\ \delta y = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se linearizziamo nell'intorno di P_2 otteniamo:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = 0 \\ \delta\dot{x}_2 = \pi\,\delta x_2 \\ \delta y = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}$$

(c) Si analizzi la stabilità degli stati di equilibrio tramite i corrispondenti sistemi linearizzati:

- Non possiamo concludere nulla sulla stabilità di P_1 poiché il corrispondente sistema linearizzato ha 2 poli nell'origine. Per studiare invece la stabilità del sistema linearizzato, bisogna calcolare la dimensione dell'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 0$:

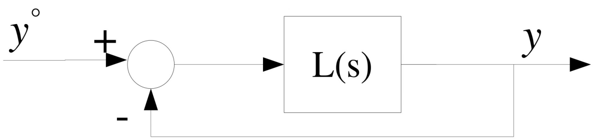
$$V_0 = \left\{ x : Ax = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \longrightarrow \dim(V_0) = 2$$

Quindi il sistema linearizzato nell'intorno di P_1 è semplicemente stabile.

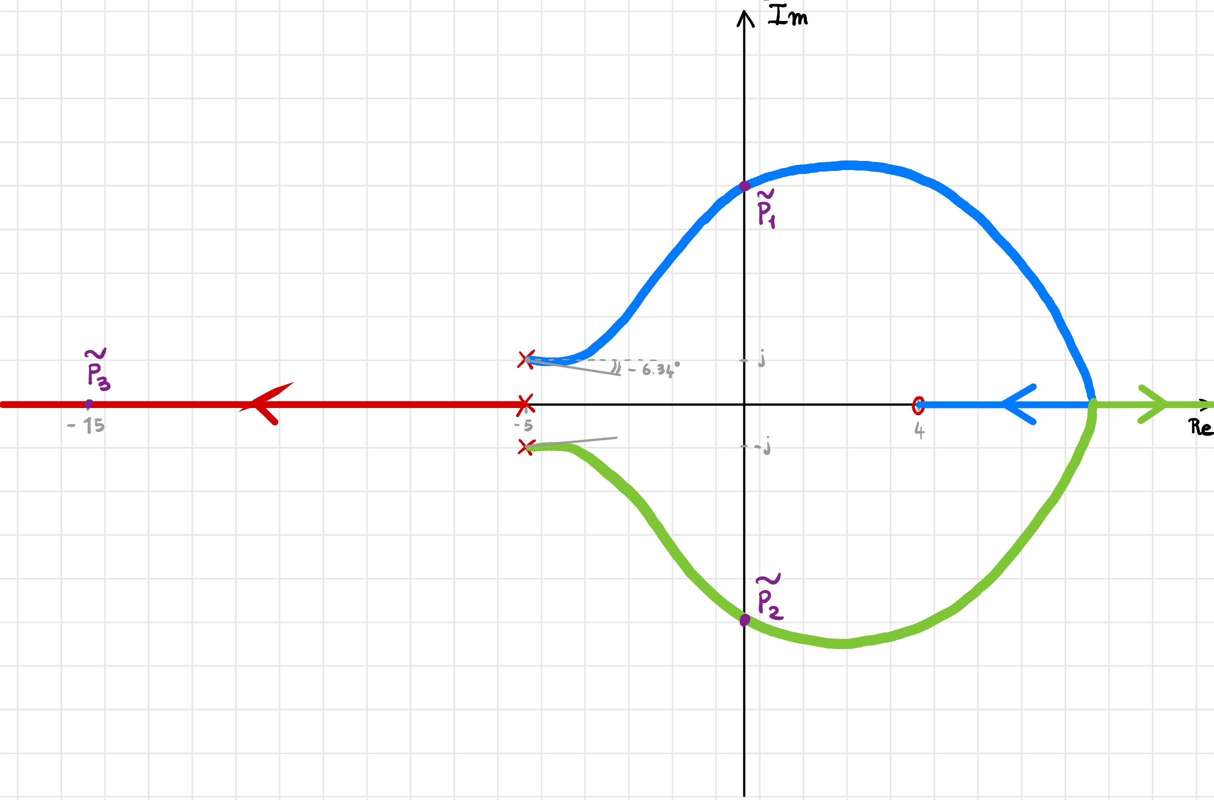
- Il sistema linearizzato nell'intorno di P_2 è instabile poiché possiede un autovalore reale positivo. Quindi, P_2 è instabile.

Es. 4: Si consideri il sistema di controllo



$$L(s) = \rho \frac{(s-4)}{(s+5+j)(s+5-j)(s+5)}$$

(a) Per $\rho < 0$, si tracci il luogo delle radici



$m = 1 \longrightarrow$ un ramo arriva nello zero (blu)

$n = 3$

$\nu = 2 \longrightarrow$ 2 rami tendono a ∞

- I rami che tendono all'infinito, lo fanno lungo asintoti che si intersecano sull'asse reale nel punto

$$x_a = \frac{1}{2}\left(-4 - \left(5+\cancel{j} + 5-\cancel{j} + 5\right)\right) = -9.5$$

e formano con l'asse reale angoli pari a

$$\frac{2k \cdot 180°}{2}, \quad k = 0, 1$$

$k=0 \rightarrow 0$ (verde)

$k=1 \rightarrow 180°$ (rosso)

- Angoli di partenza dei poli c.c.:

$$\alpha_{-5+j} = 2\overset{\overset{0}{\|}}{k} \cdot 180° + \left(180° - \text{atan}\left(\frac{1}{9}\right)\right) - 90° - 90$$

$$= -6.34°$$

$$\alpha_{-5-j} = +6.34°$$

(b) Per quali valori di $\rho < 0$ il sistema in anello chiuso è A.S.

Calcolo il baricentro del luogo:

$\nu \geq 2 \quad \longrightarrow \quad x_b = -\frac{1}{3}\left(5+j+5-j+5\right) = -5$

$$x_b = \frac{1}{3}\left(\underbrace{\cancel{\tilde{p}_1} + \cancel{\tilde{p}_2}}_{c.c.} + \tilde{p}_3\right) = \frac{1}{3}\tilde{p}_3 \Rightarrow \tilde{p}_3 = -15$$

$$|\bar{\rho}| = \frac{|D(-15)|}{|N(-15)|} = \frac{\sqrt{101}\cdot\sqrt{101}\cdot|-10|}{|-15-4|} \cong 53.16$$

$$-53.16 < \rho < 0$$

Es. 5:

1. V (Una f.d.t. a fase minima ha guadagno > 0)

2. V

3. V $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$; $\xi < 0$ implica che la parte reale dei poli c.c. è positiva!

4. V

5. V $0 = A\bar{x} + B\bar{u} \rightarrow (\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0)$ è sempre uno stato di equilibrio.