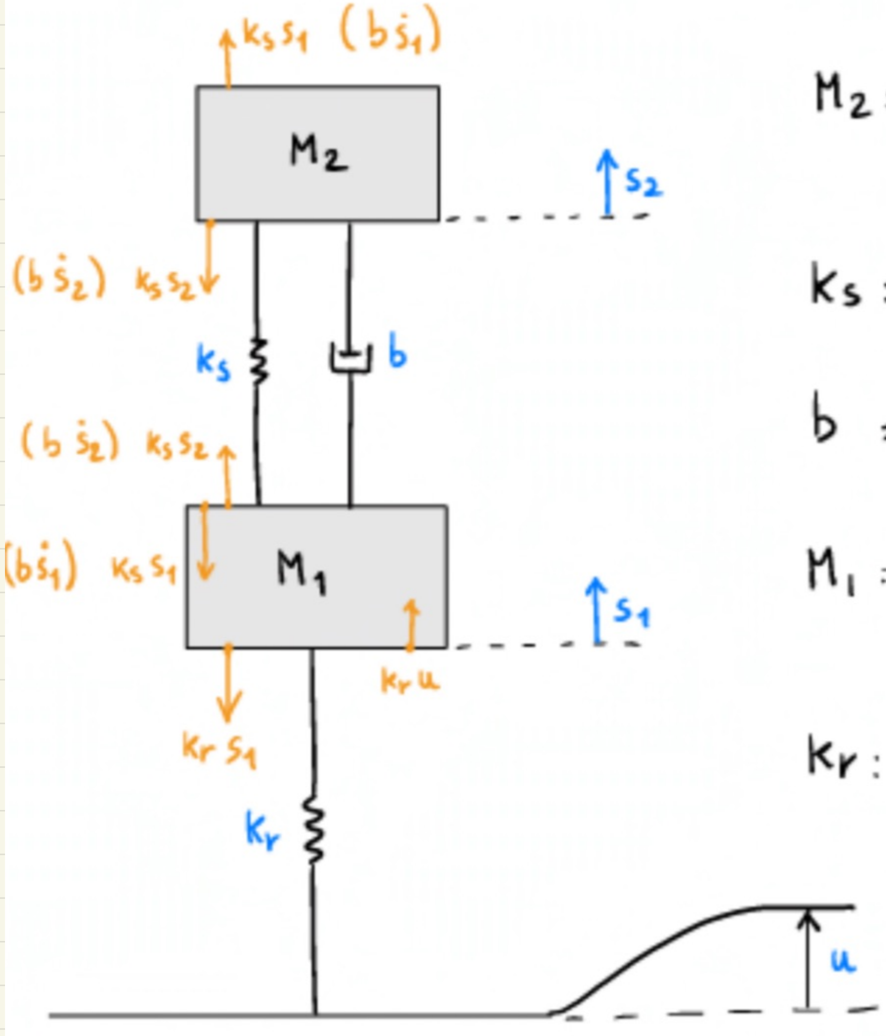
27-02-2023

Es. 1. Soluzione estratta dall'esercitazione (pdf su drive) del Prof. Cucuzzella. Il valore dei parametri potrebbe essere diverso!

Modello di una sospensione
(massa - molla - smorzatore)



M_2: massa del veicolo (2000 kg)

$K_s = 200\,000 \ \frac{N}{m}$
$b = 10\,000 \ \frac{Ns}{m}$
} parametri della sospensione

M_1: massa della ruota (10 kg)

K_r: elasticità della ruota (10^6 N/m)

s_1, s_2: scostamento delle masse dalle posizioni di equilibrio

• Trascurare la gravità!

1. Ricavare il sistema dinamico con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t) = s_2(t)$:

$$x_1 := s_1 \; ; \quad x_2 := \dot{s}_1 \; ; \quad x_3 := s_2 \; ; \quad x_4 := \dot{s}_2$$

- Ruota (M_1), bilancio di forze:

$$M_1 \ddot{s}_1 = k_s (s_2 - s_1) + b(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) - k_r (s_1 - u)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \underbrace{\frac{k_s}{M_1}}_{20\cdot 10^3}(x_3 - x_1) + \underbrace{\frac{b}{M_1}}_{10^3}(x_4 - x_2) - \underbrace{\frac{k_r}{M_1}}_{100\cdot 10^3}(x_1 - u) \end{cases}$$

- Veicolo (M_2), bilancio delle forze:

$$M_2 \ddot{s}_2 = -k_s (s_2 - s_1) - b(\dot{s}_2 - \dot{s}_1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\underbrace{\frac{k_s}{M_2}}_{100}(x_3 - x_1) - \underbrace{\frac{b}{M_2}}_{5}(x_4 - x_2) \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = -120 \cdot 10^3 x_1 - 10^3 x_2 + 20 \cdot 10^3 x_3 + 10^3 x_4 \\
\qquad + 100 \cdot 10^3 u \\
\dot{x}_3 = x_4 \\
\dot{x}_4 = 100 x_1 + 5 x_2 - 100 x_3 - 5 x_4 \\
y = x_3
\end{cases}
$$

$$
A = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
-120 \cdot 10^3 & -10^3 & 20 \cdot 10^3 & 10^3 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
100 & 5 & -100 & -5
\end{bmatrix}
$$

$K-3>0$ e $K-5>0$

$\boxed{K>5}$

Es. 2

a)

$2s^3+4s^2+2(K-3)\cdot s+8(K-5) \rightarrow$ CN è che tutti i coeff. abbiano stesso segno.

$$\begin{array}{c|cc}
h & 2 & 2(K-3) \\
k & 4 & 8(K-5) \\
\ell & 14-2K & 0 \\
m & 8(K-5) &
\end{array}$$

$$\ell_1 = -\frac{1}{K_1}\det\left(\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\left(16(K-5)-8(K-3)\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\left(-80+24+8K\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(8K-56\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\,8\left(K-7\right) = \underline{14-2K}$$

>0

$2K<14$

$\underline{K<7}$

$$m_1 = \frac{-1}{\cancel{14-2K}}\cdot -8(K-5)\cancel{(14-2K)}$$

$$= 8(K-5) \rightarrow \underline{K>5}$$

In conclusione $\underline{5<K<7}$

b) $\cancel{2}s^3 + 4s^2 + 2 \cdot 3s + 8$

$2s^3 + 4s^2 + 6s + 8$

$2(s^3 + 2s^2 + 3s + 4)$

$$G(s) = \frac{1}{2(s^3 + 2s^2 + 3s + 4)}$$

$u(t) = imp(t) + 2\sin(2t)$

$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

$$y_{1\infty} = \lim_{s \to 0} s\, G(s) \cdot \underbrace{1}_{\mathcal{L}[imp(t)]} =$$

$$= \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{2(s^3 + 2s^2 + 3s + 4)} = 0$$

$y_2(t) = 2 \cdot |G(j2)| \cdot \sin(2t + \sphericalangle G(j2))$

$$\Rightarrow \quad G(j2) = \frac{1}{2(-8j - 8 + 6j + 4)}$$

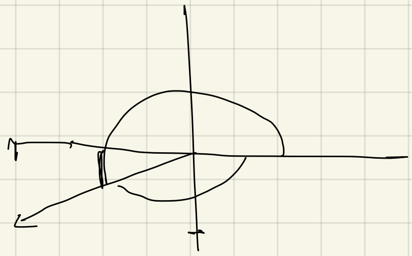
$$= \frac{1}{2(-2j-4)}$$

$$|G(j2)| = \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2(j-2)}\right| = \frac{1}{4}\cdot\left|\frac{1}{j-2}\right|$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{4\sqrt{5}}$$

$$\angle G(j2) = +(180 - \operatorname{atan}(1/2))^\circ \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$= 2.6779 \text{ rad}$$



$$-(180 - \operatorname{atan}(2/4))$$

$$y_{2\infty} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\sin(2t + 2.6779)$$

$$y_\infty = 0 + \frac{1}{2\sqrt{5}}\sin(2t + 2.6779)$$

c)

$$G(s) = \frac{1}{2(s^3 + 2s^2 + 3s + 4)}$$

$$G(s) = \frac{1/2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Esercizio 3 (5 punti)

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Punteggio: risposta esatta= 1, errore= −0.5, non risponde= 0.

1. Un controllore PID rende un sistema in anello chiuso sempre A.S. **F** Il fatto che sia un PID non implica che stabilizzi
2. Si consideri un sistema LTI ed un ingresso $u(t) = Asin(wt + \phi)$. La corrispondente uscita a regime sarà sempre del tipo $y(t) = Bsin(wt + \psi)$ con B numero reale finito e ψ opportuno. **F** Senza AS non vale teo risposta in freq.
3. Un sistema dinamico non lineare può avere zero punti di equilibrio. **V**

$$\dot{x}_1 = x_1 + 1 \qquad 0 = \bar{x}_1 + 1$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + 2 \rightarrow 0 = \bar{x}_2 + 2$$

→ Nessuna soluzione

4. Uno schema a blocchi è A.S. solo se i singoli blocchi sono A.S. **F** nella retroazione posso stabilizzare $G(s)$ instabile
5. Per un sistema LTI, il punto $(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0)$ è sempre punto di equilibrio. **V**

$$0 = A\bar{x} + B\bar{u}$$
$$\Downarrow$$
$$0 = A \cdot 0 + B \cdot 0$$