Fondamenti di Automatica
Esame 27 Febbraio 2023

Es. 3: Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)\left(x_1(t)-1\right) + x_2(t)\,u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t)\,u_2(t) \\ y_1(t) = x_1(t)\,e^{u_2(t)} \\ y_2(t) = x_2(t)\,e^{u_1(t)} \end{cases}$$

a) Si determinino gli stati di equilibrio corrispondenti agli impressi $u_1(t) = \bar{u}_1 = 0$, $u_2(t) = \bar{u}_2 = +1$

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_1(\bar{x}_1 - 1) \longrightarrow \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_1 = +1 \\ 0 = -\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \longrightarrow \bar{x}_2 = -\bar{x}_1 \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono:

$$P_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \qquad P_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

b) Si ricavi l'espressione del sist. linearizzato nell'intorno degli equilibri ottenuti.

Sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = (2\bar{x}_1 - 1)\,\delta x_1 + \bar{u}_1\,\delta x_2 + \bar{x}_2\,\delta u_1 \\ \delta\dot{x}_2 = -\delta x_1 - \bar{u}_2\,\delta x_2 - \bar{x}_2\,\delta u_2 \\ \delta y_1 = e^{\bar{u}_2}\,\delta x_1 + \bar{x}_1\,e^{\bar{u}_2}\,\delta u_2 \\ \delta y_2 = e^{\bar{u}_1}\,\delta x_2 + \bar{x}_2\,e^{\bar{u}_1}\,\delta u_1 \end{cases}$$

Nell'intorno di P_1, ottengo:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\delta x_1 \\ \delta\dot{x}_2 = -\delta x_1 - \delta x_2 \\ \delta y_1 = e\,\delta x_1 \\ \delta y_2 = \delta x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nell'intorno di P_2, ottengo:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = \delta x_1 - \delta u_1 \\ \delta\dot{x}_2 = -\delta x_1 - \delta x_2 + \delta u_2 \\ \delta y_1 = e\,\delta x_1 + e\,\delta u_2 \\ \delta y_2 = \delta x_2 - \delta u_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & e \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Si analizzi la stabilità dei punti di equilibrio e dei corrispondenti sistemi linearizzati.

Considero P_1: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$

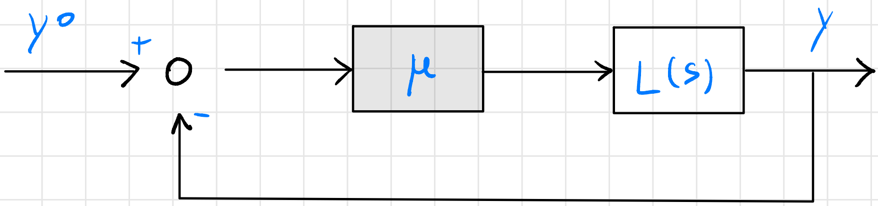
- Il sist. linearizzato attorno a P_1 è A.S.
- P_1 è A.S.

Considero P_2: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

- Il sist. linearizzato attorno a P_2 è instabile
- P_2 è instabile

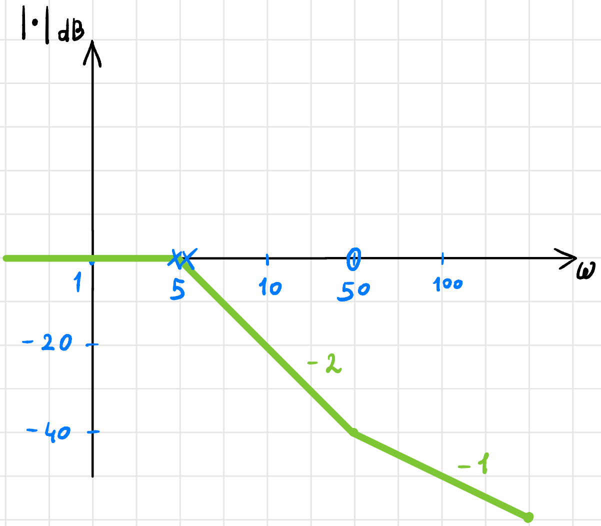
Es. 4:

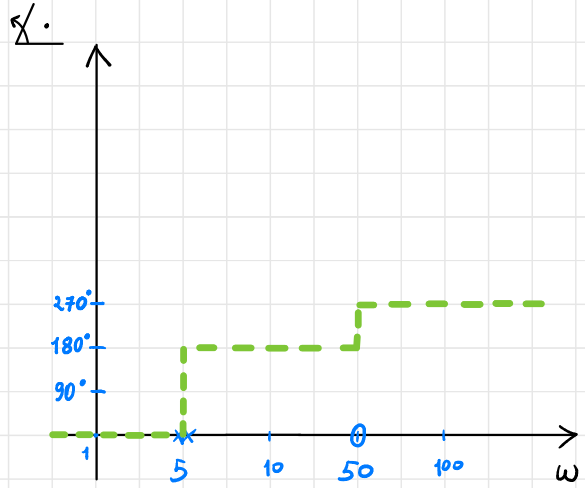
Si consideri il sistema di controllo

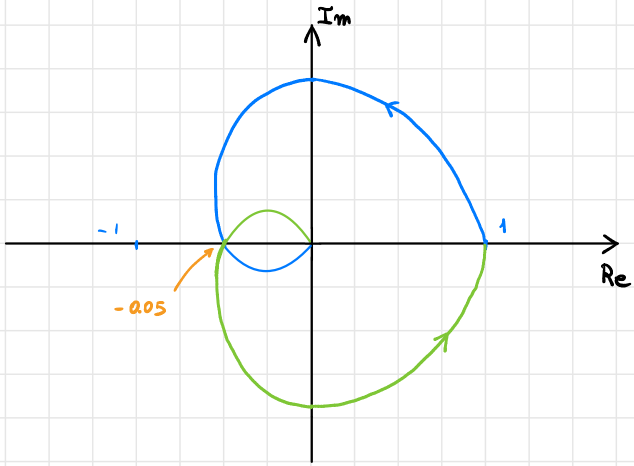


$$L(s) = \frac{\left(\frac{s}{50}+1\right)}{\left(-\frac{s}{5}+1\right)^2}$$

Sapendo che $\angle L(j23) = 180°$, si utilizzi il criterio di Nyquist per determinare tutti i valori di $\mu \neq 0$ che rendono il sist. in anello chiuso A.S.







$$|L(j\ 23)| = \frac{\sqrt{1^2 + \left(\frac{23}{50}\right)^2}}{1^2 + \left(\frac{23}{5}\right)^2} = 0{,}0497 \approx 0{,}05$$

$$\tilde{L}(s) = \mu\, L(s)$$

Il numero di giri del diagramma di Nyquist di $\tilde{L}(s)$ attorno al punto critico -1 è uguale al numero di giri del diagramma di Nyquist di $L(s)$ attorno al punto critico $-\frac{1}{\mu}$.

$P_d = 2 \Rightarrow$ vogliamo $N = \overset{\circlearrowleft}{N} - \overset{\circlearrowright}{N} = 2$

Caso $\mu > 0$ $\quad \left(-\frac{1}{\mu} < 0\right)$

$-\frac{1}{\mu} < -0.05$	$N = 0$	sist. instab.
$-\frac{1}{\mu} = -0.05$	N non ben definito	sist. non A.S.
$-\frac{1}{\mu} > -0.05$	$N = 2$	sist. A.S.

Caso $\mu < 0$ $\quad \left(-\frac{1}{\mu} > 0\right)$

$-\frac{1}{\mu} < 1$	$N = 1$	sist. instab.
$-\frac{1}{\mu} = 1$	N non ben definito	sist.. non A.S.
$-\frac{1}{\mu} > 1$	$N = 0$	sist. instab.

$F(s)$ è A.S. per $-0.05 < -\frac{1}{\mu} < 0 \Rightarrow \mu > 20$

Es. 6:

$$G(s) = \frac{0.1\, e^{-0.001 s}}{(s+1)\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}$$

- $|e_\infty| \leq 10^{-2}$, $y^o(t) = 1\ sca(t)$
- $\varphi_m \geq 60°$
- $\omega_c \geq 100\ rad/s$
- $d(t) = \sin(\omega t)$, $\omega \leq 10\ \frac{rad}{s}$ attenuato sull'uscita a regime di un fattore 10
- $n(t) = \sin(\omega t)$, $\omega \geq 700\ rad/s$ attenuato sull'uscita a regime di un fattore 10

f.d.t. $y^o \to e$ è $S(s)$

$$|e_\infty| = \frac{1}{1+0.1\mu_R} \leq 10^{-2} \Rightarrow \mu_R \geq 990$$

$10^{-2} + 10^{-3}\mu_R \geq 1$

$$\Rightarrow \mu_R = 1000 \Rightarrow \boxed{R_1(s) = 1000}$$

- f.d.t. $d \to y$ è $S(s)$; $(10\ rad/s < \omega_c)$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|L(j\omega)|} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow |L(j\omega)| \geq 10$$

$$|L(j\omega)|_{dB} \geq 20\ dB, \quad \omega \leq 10\ \frac{rad}{s}$$

- f.d.t. $n \to y$ è $-F(s)$; $(700\ rad/s > \omega_c)$

$$|F(j\omega)| = |L(j\omega)| \leq \frac{1}{10}$$

$$|L(j\omega)|_{dB} \leq -20\ dB, \quad \omega \geq 700\ \frac{rad}{s}$$

1° tentativo:

$$R_2(s) = 1 \longrightarrow L_1(s) = \frac{100\, e^{-0.001 s}}{(s+1)\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}$$

Il diagramma di Bode del modulo di $L_1(s)$ attraversa le zone proibite.

2° Tentativo

$$\tilde{L}(s) = \frac{100\, e^{-0.001 s}}{(s+1)\left(\frac{s}{300}+1\right)} \qquad \omega_c = 100 \frac{rad}{s}$$

$$\varphi_m = 180° - \left| -\underbrace{100 \cdot 0{,}001 \cdot \frac{180}{\pi}}_{5.73} - \underbrace{\operatorname{atan}(100)}_{89.43} - \underbrace{\operatorname{atan}(1/3)}_{18.44} \right|$$

$$= 66{,}4 > 60 \qquad \text{OK}$$

$$R_2(s) = \frac{\tilde{L}(s)}{L_1(s)} = \frac{100\, \cancel{e^{-0.001s}}}{\cancel{(s+1)}\left(\frac{s}{300}+1\right)} \cdot \frac{\cancel{(s+1)}\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{100\, \cancel{e^{-0.001s}}}$$

$$= \frac{\frac{s}{0.1}+1}{\frac{s}{300}+1}$$

$$\tilde{G}(s) = G(s)\, e^{-s\tau}$$

$$\tilde{\varphi}_m = \varphi_m - 100 \cdot \tau \cdot \frac{180}{\pi} > 0$$

$$\tau < \frac{\varphi_m \cdot \pi}{100 \cdot 180} = 0.0115\ s$$

Università degli Studi di Pavia