

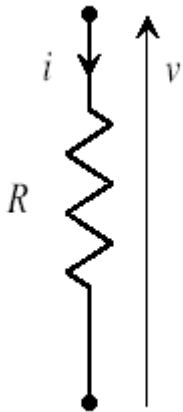
# Modelli di sistemi elementari

Fondamenti di Automatica



# Circuiti elettrici

## Resistore



$R$ : resistenza

$i$ : corrente

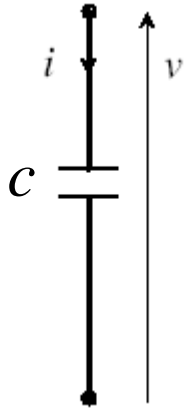
$v$ : tensione

Modello

$$v(t) = Ri(t)$$

# Circuiti elettrici

## Condensatore



$c$ : capacità'

$i$ : corrente

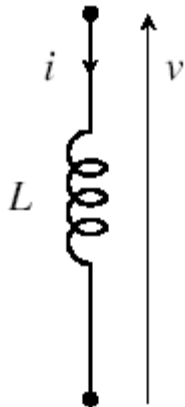
$v$ : tensione

Modello

$$c\dot{v}(t) = i(t)$$

↳ EDO

## Induttore



$L$ : induttanza

$i$ : corrente

$v$ : tensione

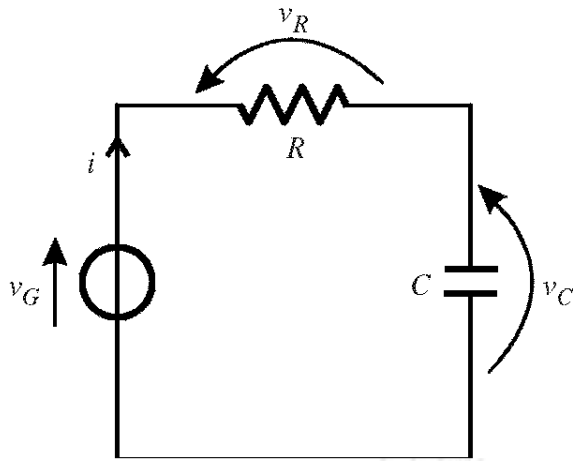
Modello

$$L\dot{i}(t) = v(t)$$

Equazione Differenziale  
Ordinaria (EDO)

# Circuiti elettrici

## Rete elettrica



$$C \dot{v}_c = i$$

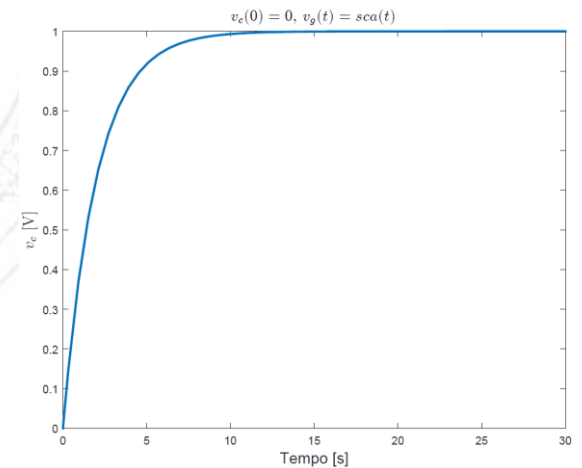
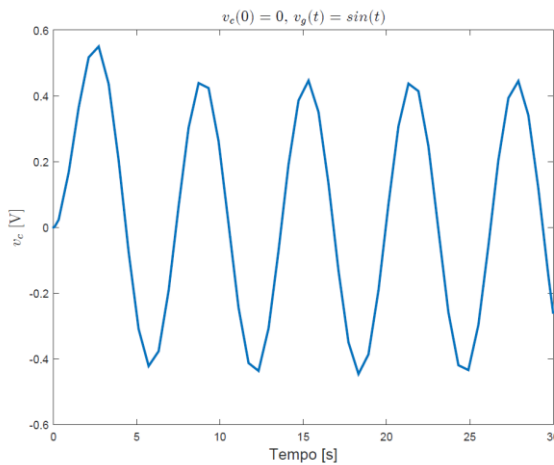
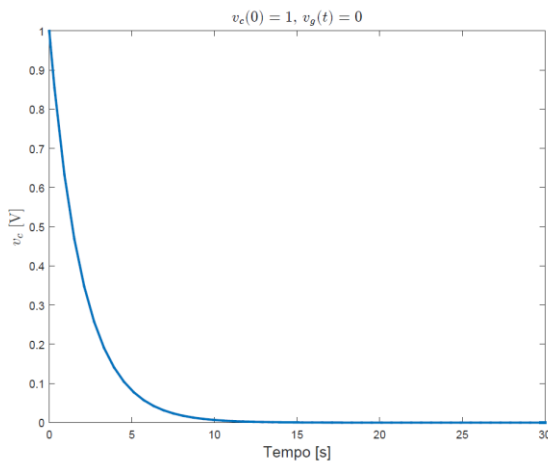
$$v_R = Ri$$

$$v_g = Rc \dot{v}_c + v_c$$

Modello

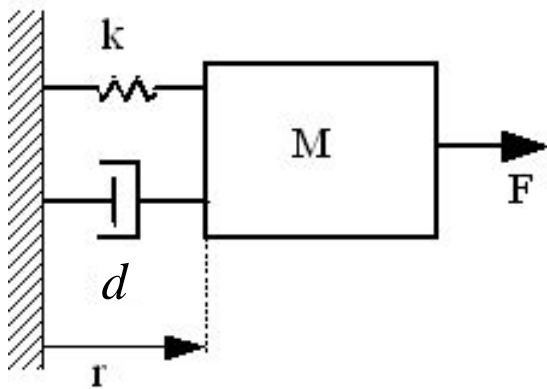
$$\dot{v}_c(t) = -\frac{v_c(t)}{Rc} + \frac{v_g(t)}{Rc}$$

EDO



# Sistemi meccanici

## Oscillatore armonico



### Modello

$$\dot{r}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = a(t)$$

$$Ma(t) = F(t) - kr(t) - dv(t)$$

↳ EDO+equazione  
lineare

$M$  : massa

$r$  : posizione

$v$  : velocità

$a$  : accelerazione

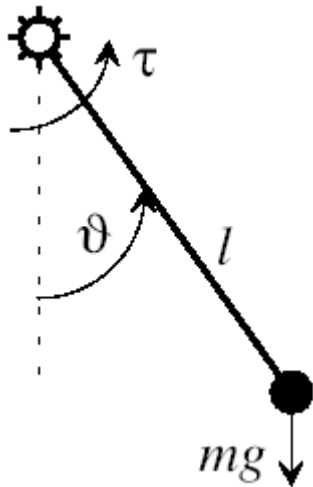
$F$  : forza esterna

$k$  : costante elastica

$d$  : coeff. di attrito

# Sistemi meccanici

## Pendolo



$m$  : massa

$g$  : accelerazione di gravita'

$l$  : lunghezza asta (priva di massa)

$\vartheta$  : posizione angolare

$\tau$  : coppia forzante

$\omega$  : velocita' angolare

$\alpha$  : accelerazione angolare

### Modello

$$\dot{\vartheta}(t) = \omega(t)$$

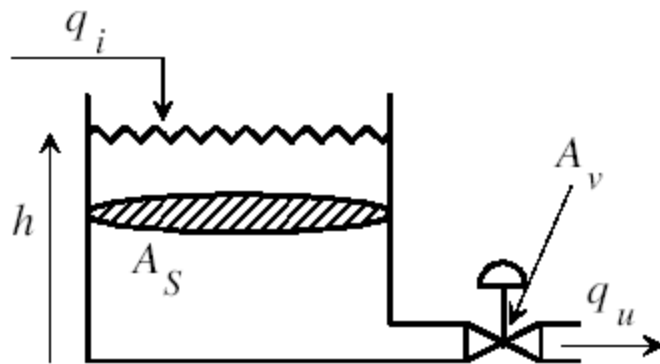
$$\dot{\omega}(t) = \alpha(t)$$

$$ml^2 \alpha(t) = \tau(t) - mgl \sin(\vartheta(t))$$

↳ EDO+equazione  
nonlineare

# Sistemi idraulici

## Serbatoio cilindrico con valvola di efflusso



$A_v$  : area di efflusso della valvola

$k$  : coefficiente caratteristico della valvola

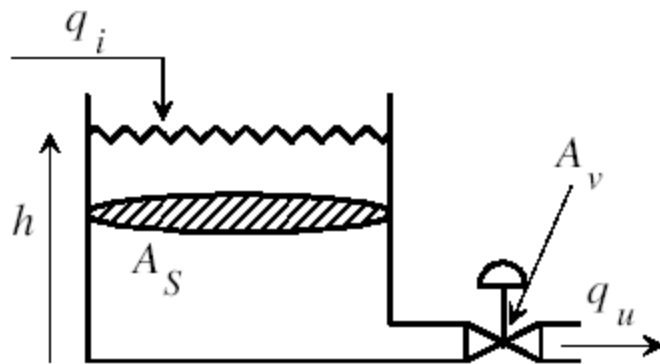
Modello

$$A_S \dot{h}(t) = q_i(t) - kA_v \sqrt{h(t)}$$

↳ EDO

# Sistemi idraulici

## Serbatoio cilindrico con valvola di efflusso



$A_v$  : area di efflusso della valvola

$k$  : coefficiente caratteristico della valvola

Modello

$$A_S \dot{h}(t) = q_i(t) - kA_v \sqrt{h(t)}$$

↳ EDO

Modello semplificato

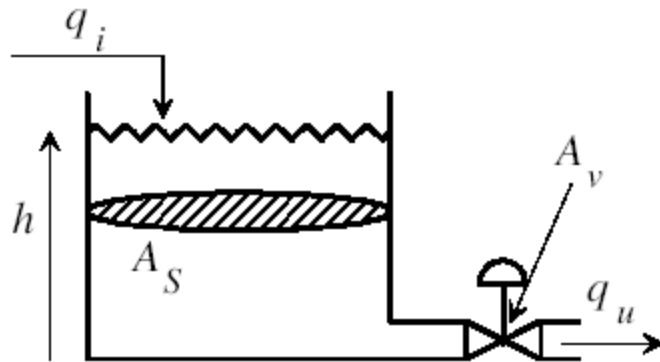
$$A_S \dot{h}(t) = q_i(t) - \tilde{k} h(t)$$

↳ EDO



# Sistemi idraulici

## Serbatoio cilindrico con valvola di efflusso



$A_v$  : area di efflusso della valvola

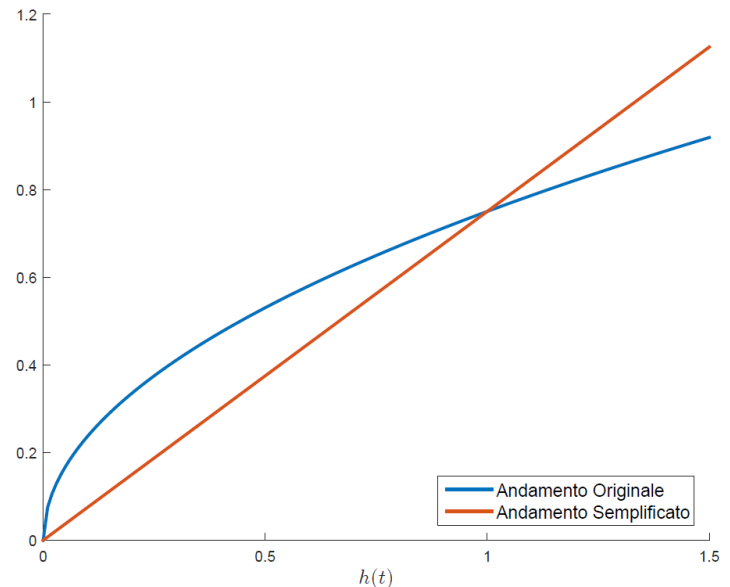
$k$  : coefficiente caratteristico della valvola

Modello

$$A_S \dot{h}(t) = q_i(t) - k A_v \sqrt{h(t)}$$

Modello semplificato

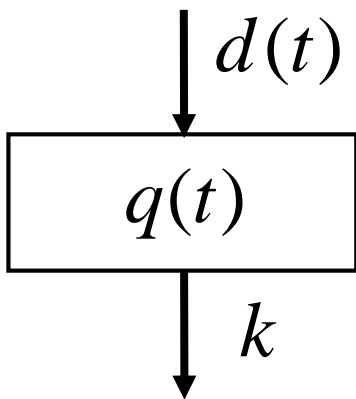
$$A_S \dot{h}(t) = q_i(t) - \tilde{k} h(t)$$



# Modelli compartimentali

Modelli per il trasferimento di massa tra diverse regioni (compartimenti) usati in farmacocinetica e bioingegneria

## Modello monocompartimentale



Frecce: portate di massa

$q$  : massa [Kg]

$d$  : portata di massa [Kg/s]

$k$  : coeff. di  
trasferimento [1/s]  
(portata di massa =  $kq(t)$ )

Modello

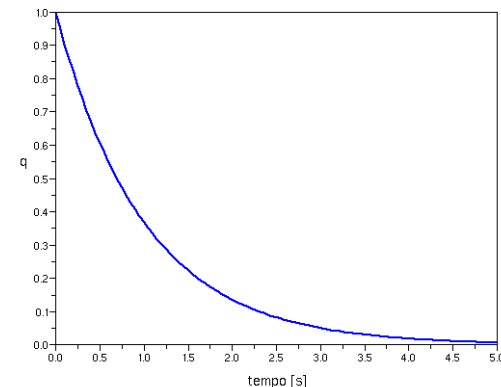
$$\dot{q}(t) = -kq(t) + d(t)$$

**Esempio:** evoluzione di un farmaco nel compartimento ematico:

$q$  : quantità del farmaco nel  
compartimento ematico

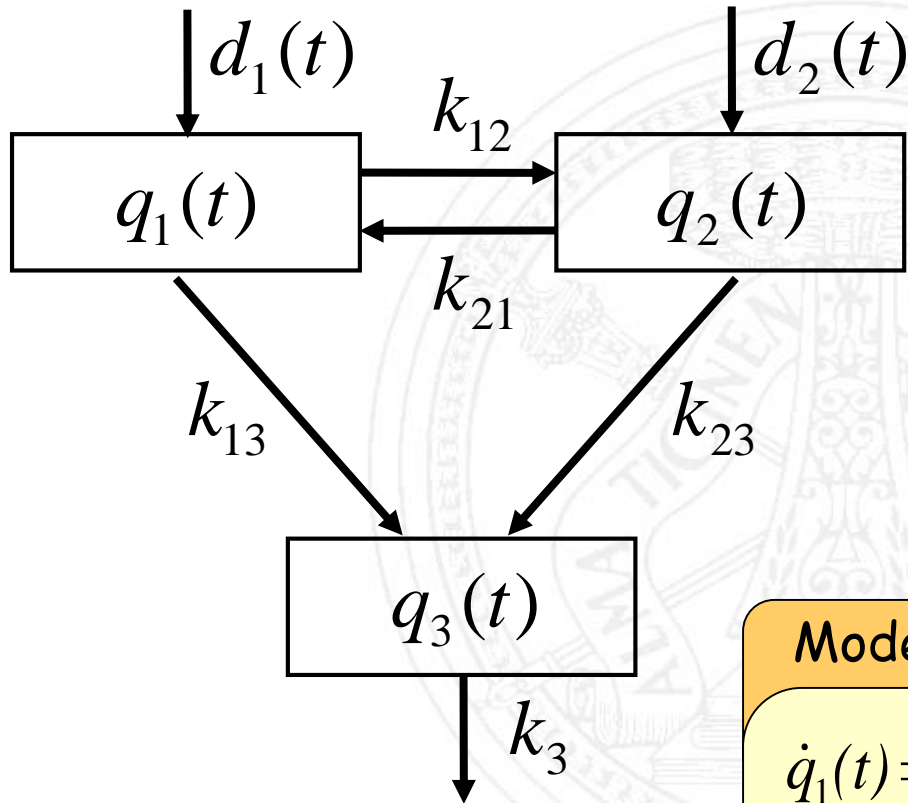
$d$  : iniezione endovenosa al tempo  $t=0$

$k$  : coefficiente di trasferimento dei  
processi metabolici ed escretori



# Modelli compartimentali

## Modelli con piu' compartimenti



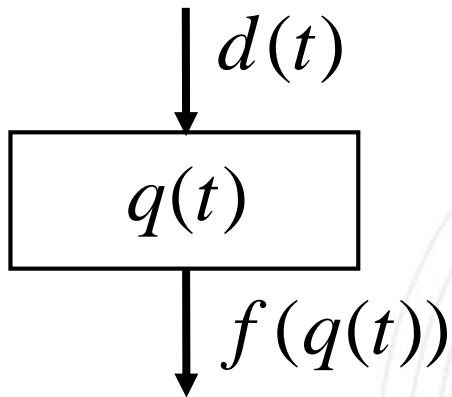
### Modello

$$\dot{q}_1(t) = -(k_{13} + k_{12})q_1(t) + k_{21}q_2(t) + d_1(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = -(k_{23} + k_{21})q_2(t) + k_{12}q_1(t) + d_2(t)$$

$$\dot{q}_3(t) = k_{13}q_1(t) + k_{23}q_2(t) - k_3q_3(t)$$

# Modelli compartimentali con trasferimento di massa non lineare



Modello

$$\dot{q}(t) = -f(q(t)) + d(t) \quad f(q) = \frac{V_{\max} q}{k_m + q}$$

(Michaelis-Menten)

- Nel caso di coeff. di trasferimento costante si aveva  $f(q) = kq$
- Ora, quando  $q$  e' "grande", la portata uscente satura al valore  $V_{\max}$

