

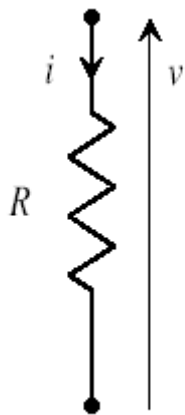


# Modelli elementari in forma di sistemi dinamici

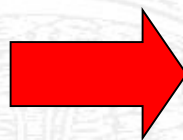
Fondamenti di Automatica

# Circuiti elettrici

## Resistore



$u = v$  : ingresso  
 $y = i$  : uscita



Sistema dinamico

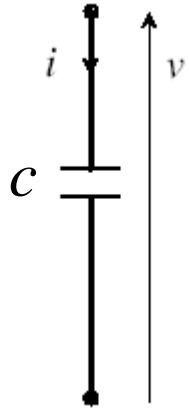
$$y = \frac{1}{R} u$$

E' un sistema LTI SISO di ordine 0 (sistema statico) e proprio

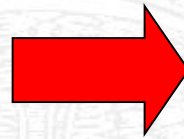
$$y = Cx + Du \quad \rightarrow \quad C = 0, D = \frac{1}{R}$$

# Circuiti elettrici

## Condensatore



$u = i$  : ingresso  
 $y = v$  : uscita  
 $x_1 = v$  : stato



Sistema dinamico

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{c} u(t)$$
$$y = x_1$$

E' un sistema LTI SISO di ordine 1, strettamente proprio

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

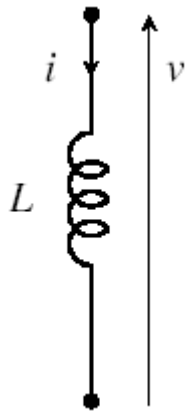
$$y = Cx + Du$$



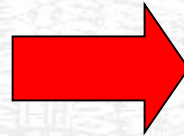
$$x = x_1 \Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{c}, C = 1, D = 0$$

# Circuiti elettrici

## Induttore



$u = v$  : ingresso  
 $y = i$  : uscita  
 $x_1 = i$  : stato



Sistema dinamico

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L} u$$

$$y = x_1$$

E' un sistema LTI SISO di ordine 1, strettamente proprio

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

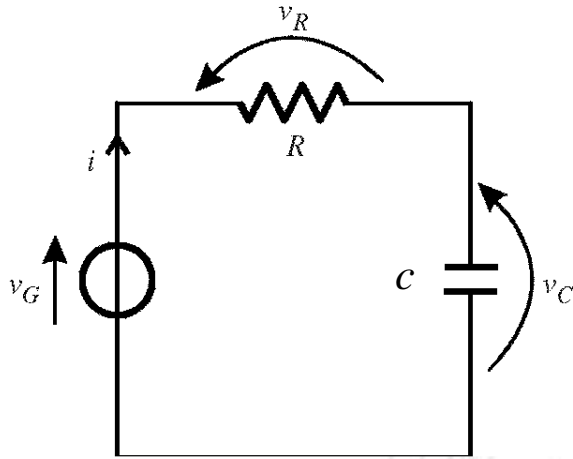
$$y = Cx + Du$$



$$x = x_1 \Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{L}, C = 1, D = 0$$

# Circuiti elettrici

## Rete elettrica



$$C\dot{v}_c = i$$

$$v_R = Ri$$

$$v_g = Rc\dot{v}_c + v_c$$

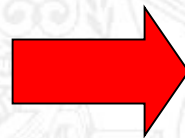
### Modello

$$\dot{v}_c(t) = -\frac{v_c(t)}{Rc} + \frac{v_g(t)}{Rc}$$

$u = v_g$  : ingresso

$y = v_c$  : uscita

$x_1 = v_c$  : stato



### Sistema dinamico

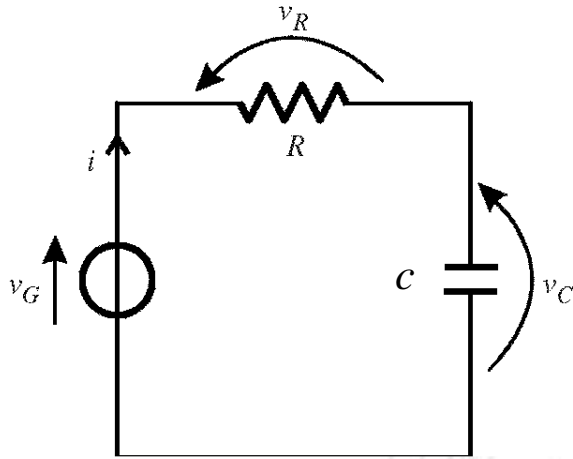
$$\dot{x}_1 = -\frac{x_1}{Rc} + \frac{u}{Rc}$$

$$y = x_1$$

In un circuito con resistori, induttori e condensatori gli stati "naturali" sono le tensioni ai condensatori e le correnti agli induttori

# Circuiti elettrici

## Rete elettrica



## Sistema dinamico

$$\dot{x}_1 = -\frac{x_1}{Rc} + \frac{u}{Rc}$$

$$y = x_1$$

E' un sistema LTI SISO di ordine 1, strettamente proprio

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

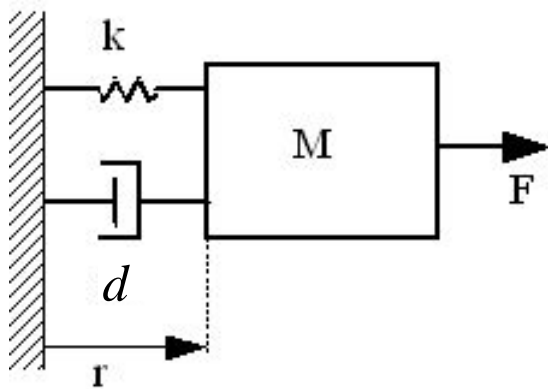
$$y = Cx + Du$$



$$x = x_1 \Rightarrow A = -\frac{1}{Rc}, B = \frac{1}{Rc}, C = 1, D = 0$$

# Sistemi meccanici

## Oscillatore armonico



$M$  : massa  
 $r$  : posizione  
 $v$  : velocità  
 $a$  : accelerazione  
 $F$  : forza esterna  
 $k$  : costante elastica  
 $d$  : coeff. di attrito

### Modello

$$\dot{r}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = a(t)$$

$$Ma(t) = F(t) - kr(t) - dv(t)$$

$u = F$  : ingresso       $y = r$  : uscita

Stati:  $x_1 = r$ ,  $x_2 = v$



### Sistema dinamico

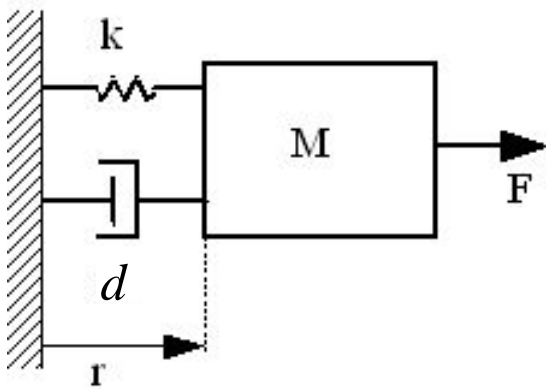
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{M}x_1 - \frac{d}{M}x_2 + \frac{1}{M}u$$

$$y = x_1$$

# Sistemi meccanici

## Oscillatore armonico



## Sistema dinamico

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{M}x_1 - \frac{d}{M}x_2 + \frac{1}{M}u$$

$$y = x_1$$

E' un sistema LTI SISO di ordine 2, strettamente proprio

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

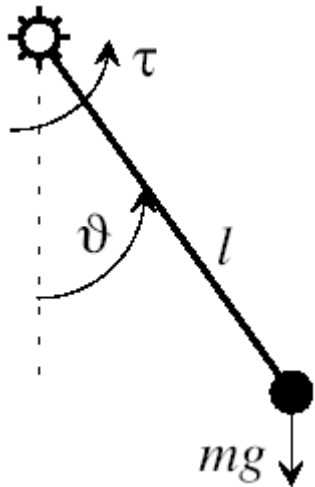


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{d}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



# Sistemi meccanici

## Pendolo

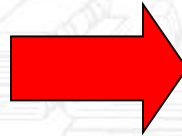


$\vartheta$ : pos. angolare  
 $\tau$ : coppia forzante  
 $\omega$ : vel. angolare  
 $\alpha$ : acc. angolare

$u = \tau$ : ingresso

$y = \vartheta$ : uscita

Stati:  $x_1 = \vartheta$ ,  $x_2 = \omega$



## Modello

$$\dot{\vartheta}(t) = \omega(t)$$

$$\dot{\omega}(t) = \alpha(t)$$

$$ml^2 \alpha(t) = \tau(t) - mgl \sin(\vartheta(t))$$

## Sistema dinamico

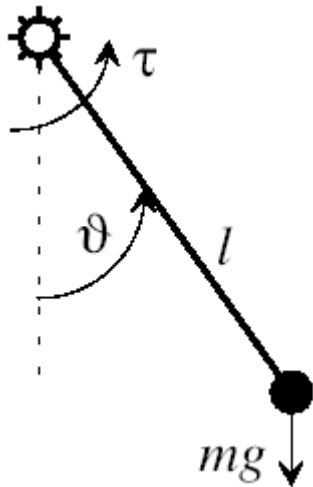
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{1}{ml^2} u$$

$$y = x_1$$

# Sistemi meccanici

## Pendolo



### Sistema dinamico

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{1}{ml^2} u$$

$$y = x_1$$

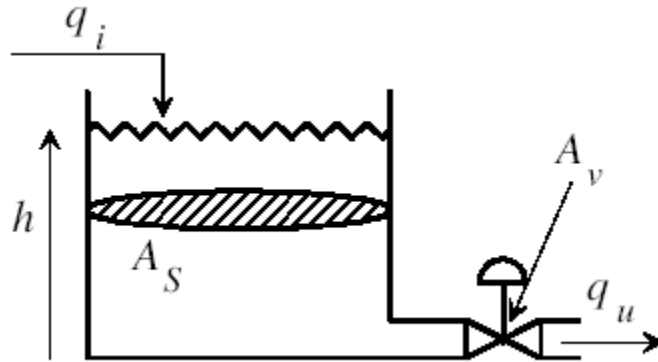
E' un sistema non lineare, tempo invariante, SISO di ordine 2, strettamente proprio

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{1}{ml^2} u \end{bmatrix}$$

$$y = g_1(x_1, x_2, u) = x_1$$

# Sistemi idraulici

## Serbatoio cilindrico con valvola di efflusso



Modello

$$A_S \dot{h}(t) = q_i(t) - kA_v \sqrt{h(t)}$$

Sistema dinamico

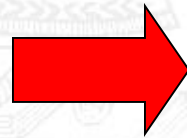
$$\dot{x}_1 = -\frac{kA_v}{A_S} \sqrt{x_1} + \frac{1}{A_S} u$$

$$y = x_1$$

$u = q_i$  : ingresso

$y = h$  : uscita

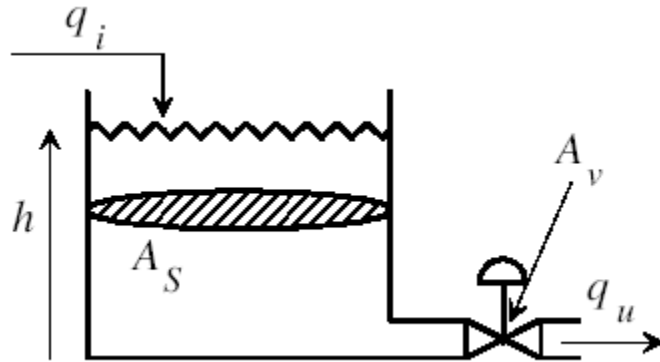
$x_1 = h$  : stato



E' un sistema non lineare, tempo invariante, SISO di ordine 1, strettamente proprio

# Sistemi idraulici

## Serbatoio cilindrico con valvola di efflusso



Modello semplificato

$$A_s \dot{h}(t) = q_i(t) - \tilde{k} h(t)$$

Sistema dinamico

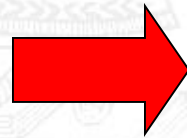
$$\dot{x}_1 = -\frac{\tilde{k}}{A_s} x_1 + \frac{1}{A_s} u$$

$$y = x_1$$

$u = q_i$  : ingresso

$y = h$  : uscita

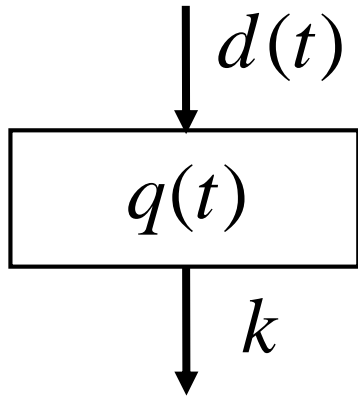
$x_1 = h$  : stato



E' un sistema lineare, tempo invariante, SISO di ordine 1, strettamente proprio

# Modelli compartimentali

## Modello monocompartimentale



Frecce: portate di massa

$q$ : massa [Kg]

$d$ : portata di massa [Kg/s]

$k$ : coeff. di  
trasferimento [1/s]  
(portata di massa =  $kq(t)$ )

Modello

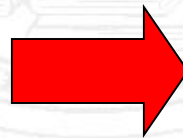
$$\dot{q}(t) = -kq(t) + d(t)$$

Supponiamo che il compartimento abbia volume  $V$  e che sia di interesse la concentrazione  $c(t) = q(t)/V$

$u = d$ : ingresso

$y = c$ : uscita

$x_1 = q$ : stato



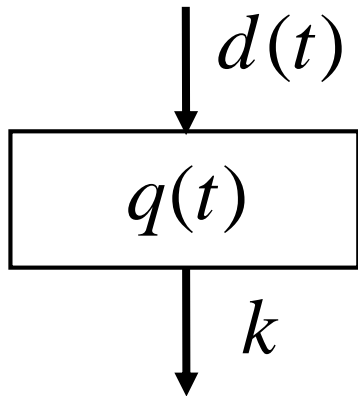
Sistema dinamico

$$\dot{x}_1 = -kx_1 + u$$

$$y = \frac{x_1}{V}$$

# Modelli compartimentali

## Modello monocompartimentale



### Sistema dinamico

$$\dot{x}_1 = -kx_1 + u$$

$$y = \frac{x_1}{V}$$

E' un sistema LTI SISO di ordine 1, strettamente proprio

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

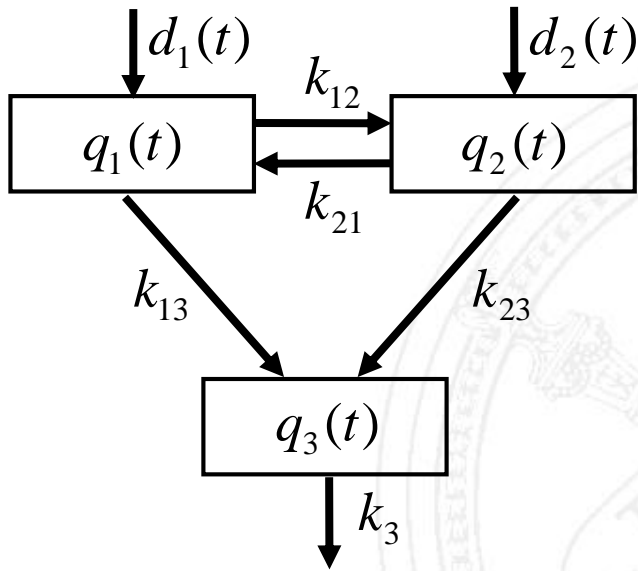
$$y = Cx + Du$$



$$x = x_1 \Rightarrow A = -k, B = 1, C = \frac{1}{V}, D = 0$$

# Modelli compartimentali

## Modelli con piu' compartimenti



Stati, ingressi, uscite:

$$x_1 = q_1, x_2 = q_2, x_3 = q_3$$

$$u_1 = d_1, u_2 = d_2$$

$$y_1 = q_3 / V_3$$

Modello

$$\dot{q}_1(t) = -(k_{13} + k_{12})q_1(t) + k_{21}q_2(t) + d_1(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = -(k_{23} + k_{21})q_2(t) + k_{12}q_1(t) + d_2(t)$$

$$\dot{q}_3(t) = k_{13}q_1(t) + k_{23}q_2(t) - k_3q_3(t)$$

$V_3$  : volume del compartimento 3

Sistema dinamico

$$\dot{x}_1(t) = -(k_{13} + k_{12})x_1(t) + k_{21}x_2(t) + u_1(t)$$

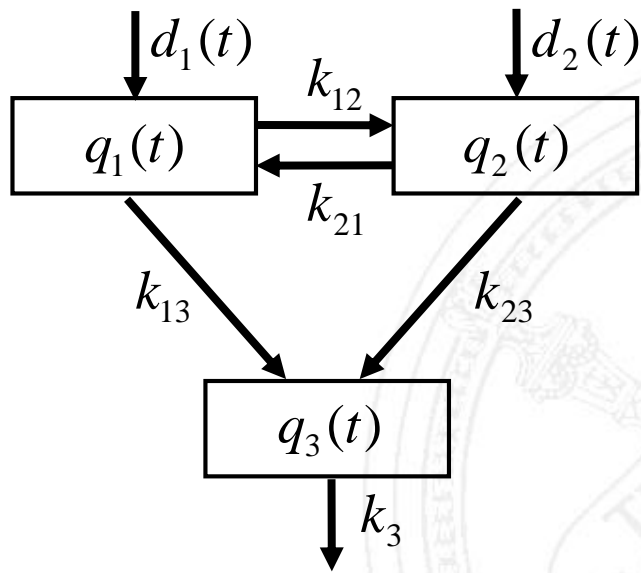
$$\dot{x}_2(t) = -(k_{23} + k_{21})x_2(t) + k_{12}x_1(t) + u_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = k_{13}x_1(t) + k_{23}x_2(t) - k_3x_3(t)$$

$$y(t) = x_3(t) / V_3$$

# Modelli compartimentali

## Modelli con piu' compartimenti



### Sistema dinamico

$$\dot{x}_1(t) = -(k_{13} + k_{12})x_1(t) + k_{21}x_2(t) + u_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -(k_{23} + k_{21})x_2(t) + k_{12}x_1(t) + u_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = k_{13}x_1(t) + k_{23}x_2(t) - k_3x_3(t)$$

$$y(t) = x_3(t)/V_3$$

E' un sistema LTI MIMO di ordine 3, strettamente proprio

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

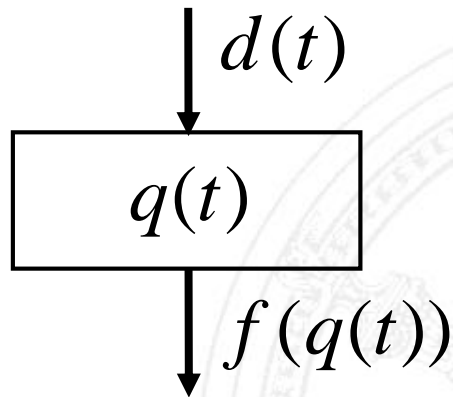
$$y = Cx + Du$$



**Esercizio (a casa):** Trovare le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$



# Modelli compartimentali con trasferimento di massa non lineare

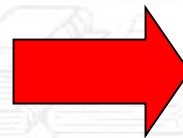


Modello (Michaelis-Menten)

$$\dot{q}(t) = -f(q(t)) + d(t) \quad f(q) = \frac{V_{\max} q}{k_m + q}$$
$$c(t) = q(t)/V$$

$V$  : volume del compartimento

$u = d$  : ingresso  
 $y = c$  : uscita  
 $x_1 = q$  : stato



Sistema dinamico

$$\dot{x}_1 = -\frac{V_{\max} x_1}{k_m + x_1} + u$$
$$y = \frac{x_1}{V}$$

E' un sistema non lineare, tempo invariante, SISO di ordine 1, strettamente proprio