Fondamenti di automatica

Esame 06-07-2020

Es. 1

$x_1 = h_1,\ x_2 = h_2,\ x_3 = h_3,\ x_4 = x,\ x_5 = u,\ u_1 = V$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{x_5 - K_1 x_1}{A_1} = x_5(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{x_4 - K_2 x_2}{A_2} = x_4(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = \dfrac{K_1 x_1 + K_2 x_2 - x_4}{A_3} = \dfrac{x_1(t) + x_2(t) - x_4(t)}{2} \\ \dot{x}_4(t) = -x_4 + x_3 = -x_4(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_5(t) = -x_5 + u_1^2 = -x_5(t) + u_1^2(t) \\ x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20},\ x_3(0) = x_{30},\ x_4(0) = x_{40},\ x_5(0) = x_{50} \\ y_1(t) = x_1(t),\ y_2(t) = x_2(t),\ y_3(t) = x_3(t),\ t \geq 0 \end{cases}$$

Es. 2

$$\dot{x}_1 = -\alpha x_1 - x_3 + u$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + 2x_3 - u$$
$$\dot{x}_3 = -x_1 + x_3$$
$$y = x_3$$

a) 1) $sX_1(s) = -\alpha X_1(s) - X_3(s) + U(s)$

2) $sX_2(s) = -X_2(s) + 2X_3(s) - U(s)$

3) $sX_3(s) = -X_1(s) + X_3(s)$

$Y(s) = X_3(s)$

Dalla 3ª eq. $X_3(s)(s-1) = -X_1(s)$

$$X_3(s) = \frac{-X_1(s)}{s-1}$$

Dalla 1ª eq.

$$sX_1(s) = -\alpha X_1(s) + \frac{X_1(s)}{s-1} + U(s)$$

$$sX_1(s) + \alpha X_1(s) - \frac{X_1(s)}{s-1} = U(s)$$

$$\frac{(s^2 - s + \alpha s - \alpha - 1)}{s-1} X_1(s) = U(s) \rightarrow X_1(s) = \frac{s-1}{s^2 - s + \alpha s - \alpha - 1} U(s)$$

$$Y(s) = -\frac{X_1(s)}{s-1} = -\frac{1}{s^2 - s + \alpha s - \alpha - 1} U(s)$$

Poiché la fdt ha grado 2 ma avevo 3 stati non esiste α per cui il sistema sia in forma ~~minima~~

b) $G(s) = \dfrac{-1}{s^2 - \cancel{s} + \cancel{s} - 1 - 1} = \dfrac{-1}{s^2 - 2}$ → il sistema non è BIBO stabile in quanto la fdt ha un denominatore che non soddisfa la CNES x Hurwitz (coeff. tutti di stesso segno e diversi da 0)

c) $G(s) = \dfrac{-1}{s^2 - s - s + \cancel{1} - \cancel{1}} = \dfrac{-1}{s(s-2)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s-2} = \dfrac{As - 2A + Bs}{s(s-2)}$

$A + B = 0 \qquad -2A = -1 \rightarrow A = 1/2 \rightarrow B = -1/2$

La risposta all'impulso è $Y(s) = G(s)\,U(s) = G(s)\,\mathcal{L}[imp(t)] = G(s) \cdot 1 = G(s)$

Perciò

$y(t) = \mathcal{L}[G(s)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2t}, \quad t \geq 0$

$y(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2}$

Es. 3

$0 = -(1 + x_1^2)(x_1 + 3) + 0$ → solo le radici reali sono valide

$0 = (x_1 - x_2)(x_2 - 1)$ → $1 + x_1^2$ non ha soluzioni valide

La 1^a eq. vale duque se $\bar{x}_1 = -3$

La 2^a se $\bar{x}_2 = -3$ o $\bar{x}_2 = 1$

Si hanno dunque 2 equilibri

$x_{eq}^{(1)} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad x_{eq}^{(2)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

3b) $\dot{x}_1 = -(x_1 + 3 + x_1^3 + 3x_1^2) + u = -x_1 - 3 - x_1^3 - 3x_1^2 + u$

$\dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_1 - x_2^2 + x_2$

$\delta\dot{x}_1 = -(1 + 3x_1^2 + 6x_1)\big|_{x_1 = \bar{x}_1} \cdot \delta x_1 + \delta u$

$\delta\dot{x}_2 = (x_2 - 1)\big|_{x_2 = \bar{x}_2} \cdot \delta x_1 + (x_1 - 2x_2 + 1)\big|_{x_1 = \bar{x}_1,\ x_2 = \bar{x}_2} \cdot \delta x_2$

Sostituisco $x_{eq}^{(1)}$

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -(1 + 27 - 18)\,\delta x_1 + \delta u = -10\,\delta x_1 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = -4\,\delta x_1 + 4\,\delta x_2 \end{cases}$$

$A = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$C = \emptyset \quad D = \emptyset$ ← non ci sono C e D

Sostituisco $x_{eq}^{(2)}$

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -(1 + 27 - 18)\,\delta x_1 + \delta u = -10\,\delta x_1 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = 0\,\delta x_1 - 4\,\delta x_2 \end{cases}$$

$A = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad C = \emptyset,\ D = \emptyset$ non ci sono C e D

c) Caso 1

$$A=\begin{bmatrix}-10 & 0\\ -4 & 4\end{bmatrix} \rightarrow \text{autovalori } -10,\ 4 \rightarrow \text{linearizzato instabile}$$

equilibrio instabile

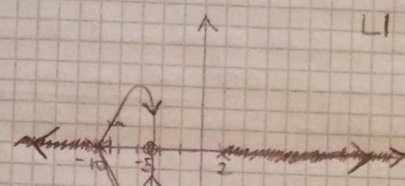
Caso 2

$$A=\begin{bmatrix}-10 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix} \rightarrow \text{autovalori } -10,\ -4 \rightarrow \text{lin. AS.}$$

equilibrio AS

ES. 4

$$L(s)=\frac{\rho(s+5)^2}{(s-2)(s+10)^3}$$



$\nu = 2$

$$x_a = \frac{1}{2}\left(5+5-(-2+3\cdot 10)\right) = \frac{10-28}{2} = -9$$

$$x_b = \frac{1}{4}(2-30) = -7$$

Angoli asintoti: $\frac{1}{2}(2K\cdot 180)$ = $k=0$: $0°$; $k=1$: $180°$

Angoli partenza poli

$$\alpha_{-10} = \frac{1}{3}\left[2K\cdot 180 + 2\cdot 180 - 180\right] = \begin{cases} k=0 & 60\\ k=1 & 180\\ k=2 & 300\end{cases}$$

$$\alpha_2 = 1\cdot\left[2K\,180 + 2\cdot 0 - 0\cdot 3\right] = 0 \quad k=0$$

Angoli arrivo zeri

$$\beta_{-5} = \frac{1}{2}\left[2K\cdot 180 + 180 + 3\cdot 0\right] = \begin{cases} k=0 & 90\\ k=1 & 270\end{cases}$$

d) Poiché un polo è a p.r. >0 e il suo ramo, per $\rho<0$, tende sempre più a destra, <u>non esiste $\rho<0$</u> per cui l'anello chiuso risulti AS

ES. 5

1) $u(t) = -e^{-t} \rightarrow U(s) = -\frac{1}{s+1} \rightarrow Y(s) = \frac{3-s}{s+20}\cdot -\frac{1}{s+1} = \frac{-(3-s)}{(s+20)(s+1)}$

$$Y(s) = \frac{A}{s+20} + \frac{B}{s+1} = \frac{As + A + Bs + 20B}{(s+20)(s+1)} \rightarrow A+B=1 \rightarrow A = 1-B$$

$A + 20B = -3$

$1 - B + 20B = -3 \quad 19B = -4 \quad B = -4/19$

$A = 23/19$

BIBO
fdt
non soddisfa
ff. tutti
$\ldots + Bs$
$\ldots 2)$
$[imp(t)]$
$G(s)$
e
$^2) + u$
$^2 + u$
$x + \delta u$
$x_2+1)|\cdot\delta x_2$ $\bar{x}_1 = x_1$, $\bar{x}_2 = x_2$
no C e D
$D = \emptyset$
sono C e D

$y(t) = \frac{23}{19} e^{-20t} - \frac{4}{19} e^{-t}$ In alternativa

$y(0^+) = \frac{23}{19} - \frac{4}{19} = 1$ $\boxed{V}$ $y(0^+) = \lim_{s \to +\infty} sY(s) = s \cdot \frac{-(3-s)}{(s+20)(s+1)} = \frac{-3s+s^2}{s^2+21s+20} = 1$

2) I modi sono legati agli autovalori della matrice A. Se la fdt fosse in forma minima allora tutti gli autovalori di A sarebbero poli della fdt. In tal caso, avere tutti i poli a p.r. <0 → non si possono avere modi illimitati. Tuttavia, la presenza di poli a p.r. $=0$ se non semplici crea instabilità e dunque modi illimitati. Sono dunque 2 le ragioni per cui la risposta è $\boxed{F}$: a) ≤ 0 → l'uguale a 0 può generare instabilità per molt. >1

b) la $G(s)$ se il sistema non è in forma minima "nasconde" alcuni poli a cui potrebbero corrisp[ondere] modi illimitati.

3) 1° ordine, AS, $\mu > 0$. Se la risposta $y(t) \geq 0 \ \forall t$ → G non ha zeri p.[i.] Vero $\boxed{V}$ altrimenti avrei una discontinuità in 0 e partirei da un valore y negativo

4) $\boxed{V}$ $x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$ ora $g_x(t) = e^{At} B$

$\rightarrow x_f(t) = \int_0^t g_x(t-\tau) u(\tau) d\tau$ e quindi è corretta

5) PI → $K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p s + K_I}{s}$ → propria ma non st. $\boxed{V}$

Es. 6 $G(s) = 0.2 \frac{e^{-s}}{\left(1 + \frac{1}{5} s\right)^2}$

- Per il principio di sov. degli effetti

$E(s) = S(s) Y^o(s) - D(s) S(s)$

$e_\infty = \lim_{s \to 0} \cancel{s} S(s) \cdot \left[\frac{12}{\cancel{s}} - \frac{20}{\cancel{s}}\right] = \lim_{s \to 0} -8 \cdot \frac{1}{1 + \mu_G \mu_R}$

Affinché $|e_\infty|=0$ è necessario che $s^{g_L} = s^{g_R+g_G}$ sia tale che $g_R+g_G \geq 1$ poiché $G(s)$ non possiede un integratore si pone $g_R=1$

~~Inoltre, affinché valga il criterio di Bode~~

$R_1(s) = \frac{1}{s}$

1° tentativo $L_1(s) = G(s)\cdot R_1(s) = \frac{0.2}{s} \cdot \frac{e^{-s}}{\left(1+\frac{1}{5}s\right)^2}$

$\omega_c = 0.2$ che non soddisfa il requisito $\omega_c \geq 1$

2° tentativo $R(s) = R_1(s)\cdot R_2(s) = \frac{1}{s}\cdot 5 \Rightarrow L_2(s) = \frac{1}{s}\frac{e^{-s}}{\left(1+\frac{1}{5}s\right)^2}$

$\omega_c = 1$ - Valuto $\varphi_m = 180 - |\varphi_c|$

$\varphi_c = -90 - 1\cdot\frac{180}{\pi} - 2\,\text{atan}\,\frac{1}{5} = -169.92$

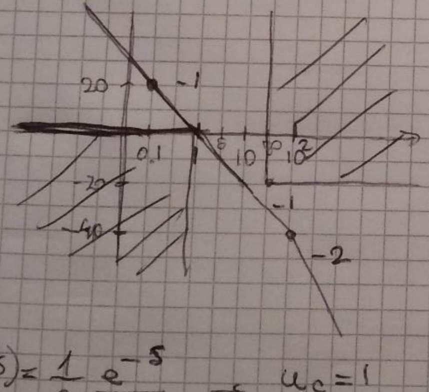
$\varphi_m = 10 < 25$!

Devo dunque modificare i poli. Poiché $R(s)$ con l'integratore è proprio potrei rimuovere un polo

$R(s) = \frac{5}{s}\cdot\left(1+\frac{1}{5}s\right)$

$L(s) = \frac{1}{s}\frac{e^{-s}}{\left(1+\frac{1}{5}s\right)} \rightarrow \omega_c = 1 \quad \varphi_c = -90 - 1\cdot\frac{180}{\pi} - \text{atan}\,\frac{1}{5} = -158.61$

$\varphi_m = 180 - |\varphi_c| = 21.39$ ancora non suf



Se tenessi solo l'integratore avrei attenuazio sufficiente per $\omega_c \geq 50$. Tuttavia dovrei aggiungere un polo ad alta freq. per la realizzabilità di $R(s)$

$R(s) = \frac{5}{s}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{5}s\right)^2}{\left(1+\frac{s}{100}\right)}$

$L(s) = \frac{1}{s}\frac{e^{-s}}{\left(1+\frac{s}{100}\right)} \rightarrow \omega_c = 1$

$\varphi_c = -90 - \frac{180}{\pi} - \text{atan}\,\frac{1}{100} = -147.87°$

$\varphi_m = 32.13 > 25$ **OK!**