Fondamenti di automatica - Ingegneria Industriale
24-06-2019

Es 1. $x_1 = s_1$, $x_2 = v_1$, $x_3 = s_2$, $x_4 = v_2$, $x_5 = K_2$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) = \dfrac{-K_1 x_1(t) - D x_2(t) - x_5(t)(x_1(t) - x_3(t))}{M_1} \\
\dot{x}_3(t) = x_4(t) \\
\dot{x}_4(t) = \dfrac{u_1(t) + x_5(t)(x_1(t) - x_3(t))}{M_2} \\
\dot{x}_5(t) = (\alpha x_3(t) - \beta x_1(t))\, x_5(t) + 4\sqrt[5]{u_2(t)} \\
x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20},\ x_3(0) = x_{30},\ x_4(0) = x_{40},\ x_5(0) = x_{50},\ t \geq 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) = -25 x_1(t) - 2.5 x_2(t) - x_5(t)(x_1(t) - x_3(t)) \\
\dot{x}_3(t) = x_4(t) \\
\dot{x}_4(t) = \dfrac{u_1(t) + x_5(t)(x_1(t) - x_3(t))}{2} \\
\dot{x}_5(t) = (3 x_3(t) - 2 x_1(t))\, x_5(t) + 4\sqrt[5]{u_2(t)} \\
x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20},\ x_3(0) = x_{30},\ x_4(0) = x_{40},\ x_5(0) = x_{50},\ t \geq 0
\end{cases}
$$

Es. 2 $G(s) = (1 - \alpha s)/(s^2 + 2\alpha + s)$

2a) Per avere una risposta inversa é necessario avere uno zero a p.r. >0 $\rightarrow$ con $\tau < 0$

Perció é sufficente guardare il numeratore

$(1 - \alpha s) \rightarrow$ Risposta inversa per $\forall \alpha > 0$

2b) Per la BIBO stabilità guardo il DEN di $G(s)$

$s^2 + 2\alpha + 5$ CNES è che tutti i coeff abbiano stesso segno e siano $\neq 0$. Perciò il sistema è BIBO stabile $\forall \alpha > 0$.

2c) $\alpha = 1 \rightarrow G(s) = \dfrac{1-s}{s^2+2+s} = \dfrac{-s+1}{s^2+s+2}$

Uso la forma canonica di raggiungibilità

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

2d) $u(t) = 3\cos(t) + 2\sin(4t)$ $\quad G(s) = \dfrac{1-s}{s^2+s+2}$

$$y_\infty = y_{1\infty} + y_{2\infty}$$

$$y_{1\infty} = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{(1-s)}{s^2+s+2} \cdot \frac{3}{\cancel{s}} = \frac{3}{2}$$

$$y_{2\infty} = |G(j4)| \cdot 2 \sin(4t + \measuredangle G(j4))$$

$$|G(j4)| = \frac{\sqrt{1^2+(-4)^2}}{\sqrt{(2-16)^2+(4)^2}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{212}} = 0.2832$$

$$\measuredangle G(j4) = \operatorname{atan}(-4) - \operatorname{atan}(4/-14) = -240^\circ = -4.1891 \text{ rad}$$

$$y_\infty = \frac{3}{2} + 0.5664 \sin(4t - 4.1891)$$

Es 3

$0 = (\bar{x}_2 - 1)(x_1 + 2)$ → $\bar{x}_2 = 1$ o $\bar{x}_1 = -2$

$0 = \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2$

Sostituisco nella 2^a equazione

$\bar{x}_2 = 1 \rightarrow \bar{x}_1^2 = 1 \rightarrow \bar{x}_1 = \pm 1$

$\bar{x}_1 = -2 \rightarrow \bar{x}_2 = \bar{x}_1^2 \rightarrow \bar{x}_2 = 4$

Si hanno perciò 3 equilibri

$$x^{eq(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^{eq(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x^{eq(3)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Si considera dunque $x^{eq(1)}$ per la linearizzazione

$$\delta \dot{x}_1(t) = (\bar{x}_2 - 1)\delta x_1(t) + (\bar{x}_1 + 2)\delta x_2(t) = 0\delta x_1(t) + 3\delta x_2(t)$$

$$\delta \dot{x}_2(t) = 2\bar{x}_1 \delta x_1(t) - \bar{u}\delta x_2(t) - \bar{x}_2 \delta u(t) = 2\delta x_1(t) - \delta x_2(t) - \delta u(t)$$

$$\delta y(t) = 2\sin(\bar{x}_1)\cos(\bar{x}_1)\cdot \delta x_1(t) - 2\cos(\bar{x}_2)\sin(\bar{x}_2)\delta x_2(t)$$

$$= 2\sin(1)\cos(1)\delta x_1(t) - 2\cos(1)\sin(1)\delta x_2(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2\sin(1)\cos(1) & -2\cos(1)\sin(1) \end{bmatrix}$$

$D = 0$

stabilità $\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 3 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) =$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

L'equilibrio ed il sistema linearizzato sono INSTABILI

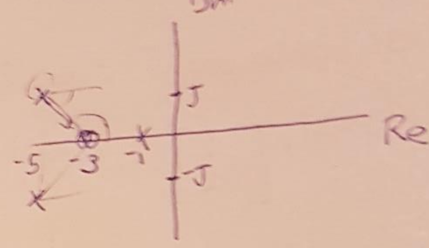
2 Es 4 $L(s) = \rho \frac{(s+3)^2}{(s+1)(s+5+j)(s+5-j)}$ $\quad v = 1$

$x_A = \frac{1}{v}\left[\sum z_i - \sum p_j\right] = 6 - (1+5+\cancel{j}+5-\cancel{j}) = -5$

asintoti $\frac{2K\cdot 180}{v}$, $K=0, \dots v-1 \rightarrow 0^\circ$ $(K=0)$

2

Angoli partenza dai poli



$\alpha_{-1,1} = \frac{1}{\mu_j}\left[2K180 + \sum\theta_i - \sum\varphi_j\right]$

$= 1\left[0+0+0-(-\alpha+\alpha)\right] = 0^\circ$

$\alpha_{-5+j,1} = 1\left[0 + 2\left(180 - atan\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \left(180 - atan\left(\frac{1}{4}\right) + 90\right)\right]$

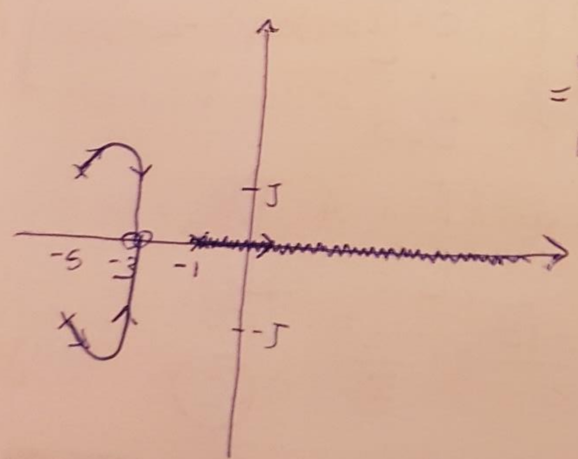
2

$\simeq 50.9^\circ$

$\alpha_{-5-j,1} = -50.9^\circ$

Angoli arrivo negli zeri $\beta_{-3,2} = \frac{1}{2}\left[2K180 + (-\beta+\beta) + 180\right]$

$= \begin{cases} K=0 & 90^\circ \\ K=1 & 270^\circ \end{cases}$



il sistema é AS per tutti $-2.89 < \rho < 0$

$|\rho| = \frac{|D(0)|}{|N^*(0)|} = \frac{1\cdot\sqrt{5^2+1}\cdot\sqrt{5^2+1}}{9} = \frac{26}{9}$

Es. 5 Le risposte corrette erano: VFVVV

Es. 6 $$G(s) = \frac{5\, e^{-0.04s}\left(1+\frac{s}{30}\right)}{\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

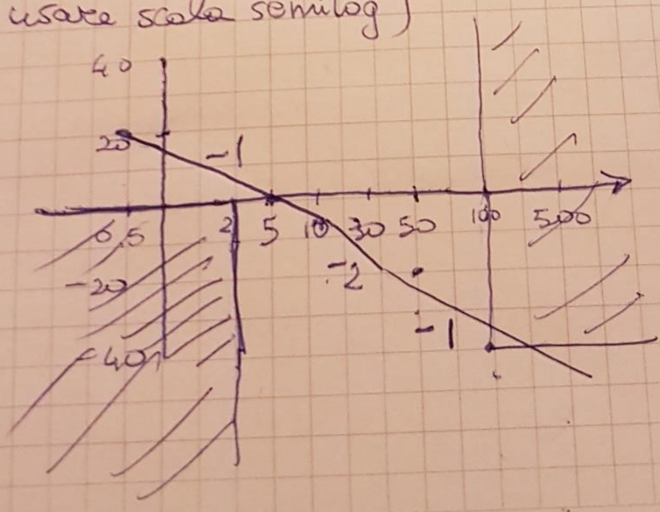
a) affinché e_∞ sia 0 è necessaria la presenza di un integratore. Come primo tentativo scelgo

$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow L(s) = \frac{5}{s}\, \frac{e^{-0.04s}\left(1+\frac{s}{30}\right)}{\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

$\omega_c = 5$ $$\varphi_c = -90 - 0.04\cdot 5\cdot\frac{180}{\pi} + \operatorname{atan}\left(\frac{5}{30}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{5}{10}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{5}{100}\right) = -121.42$$

$$\varphi_m = 58.57 < 70^\circ$$

Inoltre ha il seguente diagramma di Bode (all'esame usare scala semilog)



Passa nella zona proibita e $\varphi_m < 70$ non va bene!

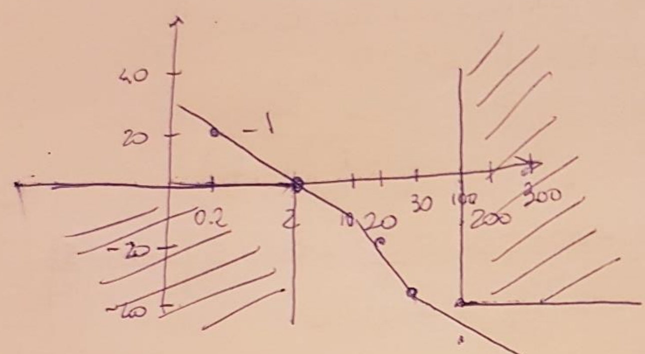
2° tentativo: riduco la banda a $\omega_c = 2$

$$R(s) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s} = \frac{0.4}{s} \rightarrow L(s) = \frac{2}{s} e^{-0.04s} \frac{\left(1+\frac{s}{30}\right)}{\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

$$\omega_c = 2 \rightarrow \varphi_c = -90 - 0.04 \cdot 2 \cdot \frac{180}{\pi} + \operatorname{atan}\left(\frac{2}{30}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{2}{10}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{2}{100}\right)$$

$$= -103.23$$

$$\varphi_m = 76.77 > 70 \text{ OK!}$$



OK!

Come si può notare $|L(j0.2)|_{dB} = 20dB$

Poiché l'attenuazione di y^o su e dipende da $S(s)$

e quest'ultima in modulo per $\omega < \omega_c$ è approssimata come $\frac{1}{|L(j\omega)|}$

si ha che $\sin(0.2t)$ viene attenuata di 10 volte.