NOTES

Es. 1

$M = 1$, $\ell = 0.1$

$I\alpha = \tau - mg\ell \sin\theta \qquad I = m\ell^2$

$\alpha = \frac{\tau}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell}\sin\theta$

$\dot{\tau} = -3\tau + 4V$

Stati $x_1 = \theta$, $x_2 = \omega$, $x_3 = \tau$ Ingressi: $u = V$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{x_3(t)}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell}\sin x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) = -3x_3(t) + 4u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}, \quad x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, x_3(0) = x_{30}, t \geq 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 100x_3(t) - 98.1 \sin x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) = -3x_3(t) + 4u(t) \\ x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, x_3(0) = x_{30}, x_4(0) = x_{40}, t \geq 0 \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

REMINDER

Es 2

$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 + u$

$\dot{x}_2 = -x_1 - \alpha x_2 + u$

$y = 2x_1$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -\alpha \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

a) $G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$

$$(sI-A) = \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+\alpha \end{bmatrix} \qquad (sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+\alpha)-1}\begin{bmatrix} s+\alpha & - \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1} = \frac{2}{(s+2)(s+\alpha)-1}\begin{bmatrix} s+\alpha & -1 \end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1}B = \frac{2(s+\alpha-1)}{(s+2)(s+\alpha)-1} = \boxed{\frac{2(s+\alpha-1)}{s^2+(2+\alpha)s-1+2\alpha}} = G(s)$$

b). per la raggiungibilità utilizzo la matrice

$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1-\alpha \end{bmatrix}$$

affinché il sistema sia comp. raggiungibile è necessario che il det. sia $\neq 0$

$-1-\alpha+3 \neq 0 \rightarrow 2-\alpha \neq 0 \rightarrow \boxed{\alpha \neq 2}$

c) $G(s) = \dfrac{2(s-1)}{s^2+2s-1}$

Poiché il denominatore è di grado 2, vale la CNES per l'AS. Dunque il sistema non è AS (i coeff. non hanno tutti stesso segno). Non si può quindi applicare il ~~...~~ teorema del valore finale. Nel caso di un sistema non AS il sistema, a fronte di uno scalino, non converge ad un valore costante.

Es. 3 Il testo aveva un errore ($4x_1^2$ invece di $4x_1$)

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0.25x_1^2 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 16x_1x_2 \\ y &= 2x_2 \end{aligned}}$$

$\boxed{\bar{u} = 0.5}$

① $0 = -0.25x_1^2 - x_2 + u \rightarrow$

② $0 = 4x_1 - 16x_1x_2$

$0 = 4x_1(1-4x_2) \longrightarrow \boxed{x_1 = 0}$ o $1-4x_2 = 0 \rightarrow \boxed{x_2 = 0.25}$

Sostituisco in ① Caso $\boxed{x_1 = 0} \rightarrow \boxed{x_2 = 0.5}$

Caso $\boxed{x_2 = 0.25} \longrightarrow 0.25x_1^2 = -0.25 + 0.5 \rightarrow 0.25x_1^2 = 0.25 \rightarrow \boxed{x_1 = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}}$

Gli equilibri sono dunque

$x_{eq}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ $x_{eq}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.25 \end{bmatrix}$ $x_{eq}^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.25 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} \delta \dot{x}_1 = -0.5 x_1 \big|_{x_1 = \bar{x}_1} \delta x_1 - \delta x_2 + \delta u \\ \delta \dot{x}_2 = (4 - 16 x_2)\big|_{x_2 = \bar{x}_2} \cdot \delta x_1 + (-16 x_1)\delta x_2 \\ \delta y = 2 \delta x_2 \end{cases}$

Sostituisco $x_{eq}^{(1)}$

$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 = 0\delta x_1 - \delta x_2 + \delta u \\ \delta \dot{x}_2 = -4\delta x_1 + 0\delta x_2 + 0\delta u \\ \delta y = 0\delta x_1 + 2\delta x_2 + 0\delta u \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = 0$

...tuisco $x_{eq}^{(2)}$

$\delta \dot{x}_1 = -0.5\delta x_1 - \delta x_2 + \delta u$ $A = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 0 & -16 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\delta \dot{x}_2 = 0\delta x_1 - 16\delta x_2 + 0\delta u$

$\delta y = 0\delta x_1 + 2\delta x_2 + 0\delta u$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$ $D = 0$

c) Equ...

A = ...

Quind...

$x_{eq}^{(2)}$...

A = ...

CNE...

su...

AS...

Es...

B...

c) Equilibrio $x_{eq}^{(1)}$

$$A = \begin{bmatrix}0 & -1\\ -4 & 0\end{bmatrix} \longrightarrow \det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 4 & \lambda\end{bmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\lambda = \pm 2$$

Quindi il linearizzato e l'equilibrio sono instabili

$x_{eq}^{(2)}$

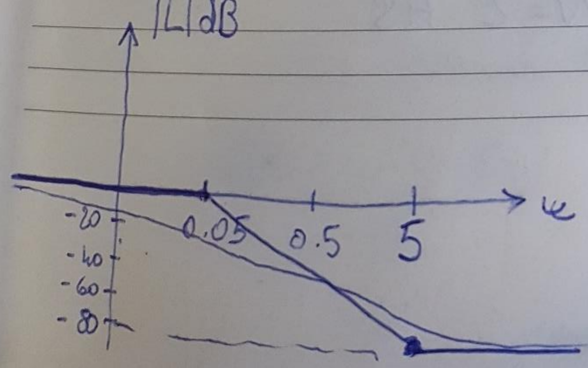
$$A = \begin{bmatrix}-0.5 & -1\\ 0 & -16\end{bmatrix} \quad \det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix}\lambda+0.5 & 1\\ 0 & \lambda+16\end{bmatrix}$$

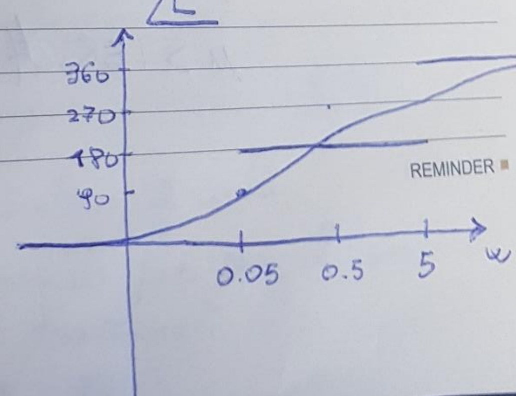
$$= (\lambda + 0.5)(\lambda + 16) = \lambda^2 + 16.5\lambda + 8$$

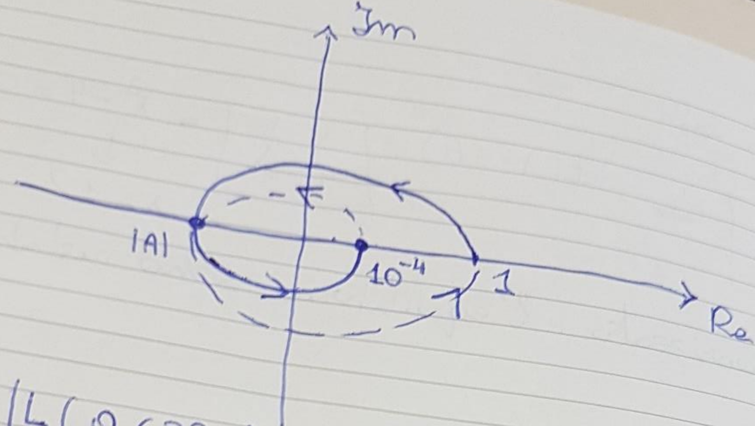
CNES verificata. Inoltre era triangolare → autovalori sulla diagonale $(-0.5, -16)$. Il linearizzato è AS ed anche l'equilibrio.

Es. 4 $\quad L(s) = \dfrac{\left(1 + \dfrac{s}{5}\right)^2}{\left(1 + \dfrac{s}{0.05}\right)^2} \qquad \angle L(0.632j) = 180°$

Bode







$|A| = |L(0.632j)| = 0.00632 = 6.32\cdot10^{-3}$

b) $P_d = 2 \rightarrow$ A.S. se $N=2$

Caso $\mu > 0$ $\quad -\frac{1}{\mu} < -6.32\cdot10^{-3}$ $N=0$ no AS

$-\frac{1}{\mu} = -6.32\cdot10^{-3}$ N non ben definito no AS

$-\frac{1}{\mu} > -6.32\cdot10^{-3}$ $N=2$ AS

ssia

$\mu < 158.24$ $N=0$ no AS

$\mu = 158.24$ N non ben def no AS

$\mu > 158.24$ $N=2$ AS

Caso $\mu < 0$: $-\frac{1}{\mu} < 10^{-4}$ $N=2$ AS

$-\frac{1}{\mu} = 10^{-4}$ N non ben def NO AS

$10^{-4} < -\frac{1}{\mu} < 1$ $N=1$ no AS

$-\frac{1}{\mu} = 1$ N non ben def no AS

$-\frac{1}{\mu} > 1$ $N=0$ no AS

Ossia

$\mu < -10^4$ $N=2$ AS

$\mu = -10^4$ N non ben def no AS

$-10^4 < \mu < -1$ $N=1$ no AS

$\mu = -1$ N non ben def no AS

$\mu > -1$ $N=0$ no AS

Es. 5 VFFVV

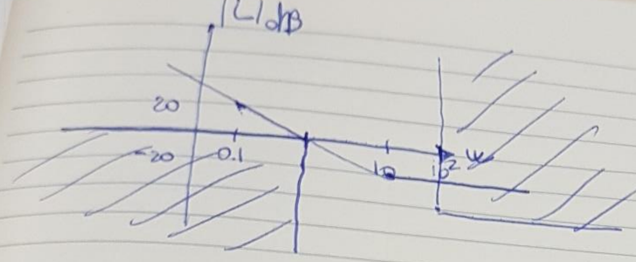
Es. 6 $G(s) = 0.5\,\frac{(s-10)}{s} = -5\,\frac{(1-0.1s)}{s}$

a) Poiché $G(s)$ ha un integratore, non è necessario aggiungerne in $R(s)$. Tuttavia, per poter applicare Bode $\mu_L > 0$. Quindi scelgo $R(s) = -\cancel{1}/5$

REMINDER

$L(s) = \frac{(1-0.1s)}{s}$ scelgo $\frac{1}{5}$ come modulo per semplificare il tracciato dei diagrammi

($|\mu_L| = 0$ dB)



$\omega_c = 1$

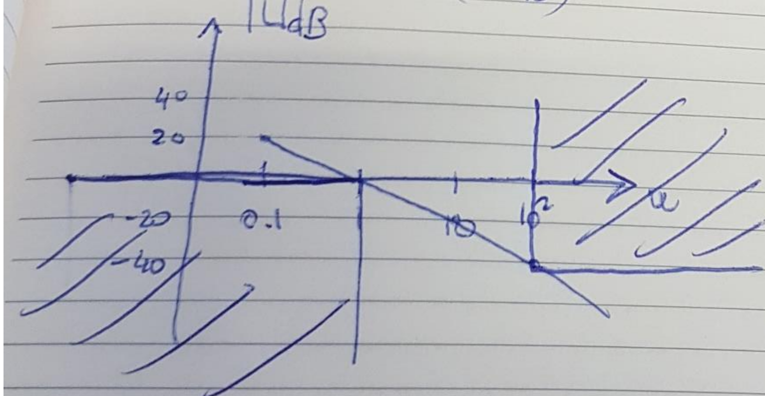
$\varphi_c = -90 - \mathrm{atan}(0.1)$

-95.71

$\varphi_m = 84$

Buon margine di fase ma passa nella zona proibita

b) $R(s) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{s}{10}\right)}$ $\quad L(s) = \frac{1}{s} \frac{\left(1 - \frac{s}{10}\right)}{\left(1 + \frac{s}{10}\right)}$



$\omega_c = 1$

$\varphi_c = -90 + \mathrm{ata}(-1/10)$

$-\mathrm{ata}\left(\frac{1}{10}\right) =$

-101.4

$\underline{\varphi_m = 78.58 \text{ OK!}}$