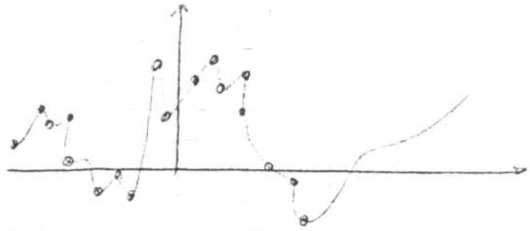
PARENTESI: TRASFORMATE

TRASFORMATA ZETA

$x(i)$: segnale deterministico

$-\infty < i < +\infty$

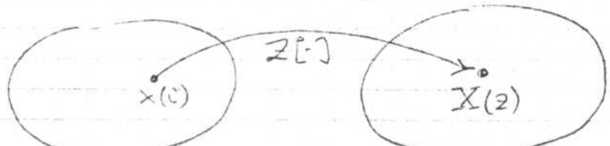


• TRASFORMATA ZETA BILATERA

$$\mathcal{Z}[x(i)] = X(z) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) z^{-i}$$

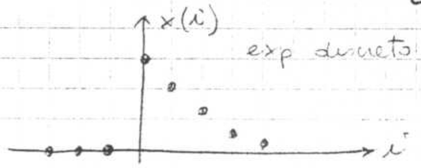
dove z è un n° complesso

NON include una VC



fz a tempo discreto (fz reali di var. intera)   fz complesse di variabile complessa

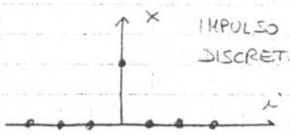
Esempio: $x(i) = \begin{cases} a^i & i \geq 0 \\ 0 & i < 0 \end{cases}$ $|a| < 1 \quad a > 0$



$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a^i z^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^i = (\text{se } |z| > |a|) = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

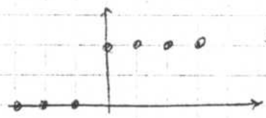
TRASFORMATE NOTEVOLI

• $x(i) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$



IMPULSO DISCRETO $X(z) = 1$ è come se fosse $a = 0$

• $x(i) = \begin{cases} 1 & i \geq 0 \\ 0 & i < 0 \end{cases}$

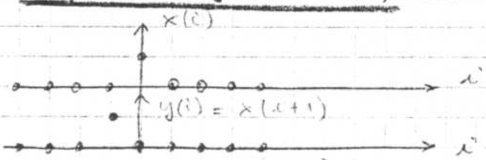


SCALINO $X(z) = \frac{z}{z-1}$ $a = 1$

PROPRIETA'

• LINEARITA': $\mathcal{Z}[\alpha x(\cdot) + \beta y(\cdot)] = \alpha X(z) + \beta Y(z)$

• $\mathcal{Z}[x(i+1)] = z X(z)$

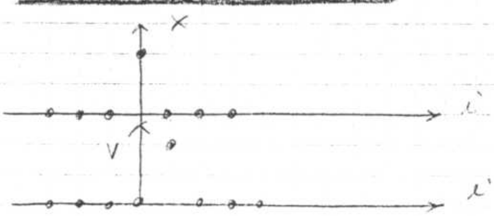


$y(i) = x(i+1)$

$y(-1) = x(0) = 1$

Spostare il segnale vuol dire moltiplicare.

• $\mathcal{Z}[x(i-1)] = z^{-1} X(z)$



$y(i) := x(i-1)$

• Interpretazione operatoriale: z: operatore anticipo unitario

z^{-1}: " ritardo "

ANTITRASFORMATA: $\exists$ una formula ma è di uso poco pratico

Se però $X(z)$ è un rapporto di polinomi è più comodo ricorrere alla "lunga divisione" (o al metodo di Heaviside)

Esempio: $X(z) = \dfrac{3z+1}{z^2+2z+1}$ $\qquad x(i) = ?$

$$
\begin{array}{l|l}
3z+1 & z^2+2z+1 \\ \hline
3z+6+3z^{-1} & 3z^{-1}-5z^{-2}+7z^{-3}+\dots \\ \hline
/\ -5-3z^{-1} & \\
-5-10z^{-1}-5z^{-2} & \\ \hline
/\ \ 7z^{-1}+5z^{-2} &
\end{array}
$$

$$X(z) = \boxed{3}z^{-1} - 5z^{-2} + 7z^{-3}$$

Ma, per la def:

$$X(z) = \dots\ x(-3)z^3 + x(-2)z^2 + x(-1)z + x(0) + \boxed{x(1)}z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots$$

$x(0) = 0 \qquad x(i) = 0 \quad i<0$
$x(1) = 3$
$x(2) = -5$
$x(3) = 7$
....

NOTA: $x(0) = 0$ perché grado(den) > grado(num)

grado(den) − grado(num) → dice quanti termini sono nulli

31-5-2001

CONVOLUZIONE DI SEGNALI DISCRETI

Sia

$$v(t) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\,y(t-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(t-i)\,y(i) \qquad \text{(CONVOLUZIONE DISCRETA)}$$

Allora $\boxed{V(z) = X(z)\,Y(z)}$

Relazione della Trasformata Z con la TRASFORMATA di FOURIER

Sia $x(i)$ tale che $\displaystyle\sum_{i=-\infty}^{\infty} |x(i)| < \infty$ — segnale che deve andare a zero velocemente (sia a $+\infty$ che a $-\infty$)

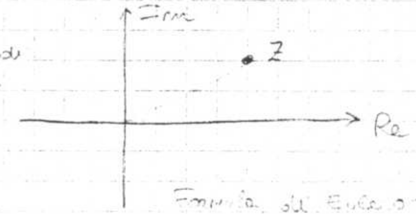
Allora $\exists$ la trasf. di Fourier $\qquad \mathcal{F}[x(\cdot)] := \displaystyle\sum_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\omega t} \qquad j = \sqrt{-1}$

e inoltre $\mathcal{F}[x(\cdot)] = X(e^{j\omega})$

NB: $X(z) := \displaystyle\sum_{t=-\infty}^{\infty} x(t)\,z^{-t}$

Sembra che la trasformata di Fourier sia un caso particolare di trasformata Z

piano di Gauss



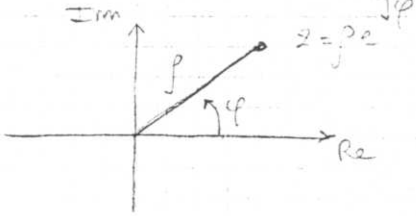
ω reale positivo

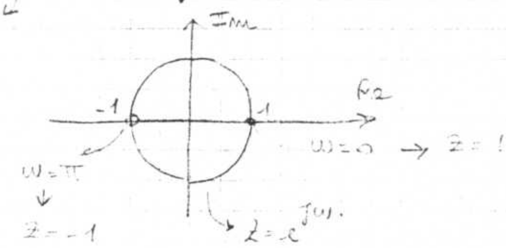
$$z = e^{j\omega}$$

$$e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$$

$\Updownarrow$

Formula di Eulero





TRASF. Z

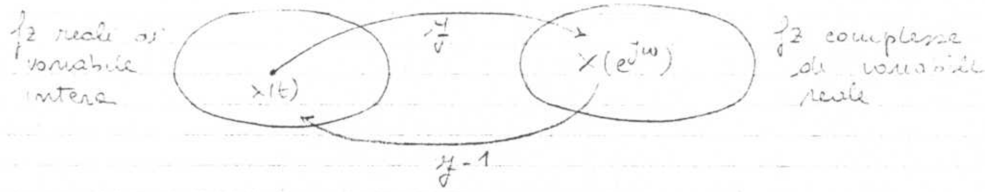
- fz complessa di variabile complessa $X(z)$

TRASF. FOURIER : fz complessa di variabile reale $X(e^{jw})$ (fz di w)

OSSERVAZIONI

- $X(e^{j(w+2k\pi)}) = X(e^{jw})$ La Trasf di Fourier è periodica — conseguenza del fatto di avere segnali discreti
- ∃ una formula di antitrasformazione

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})\, e^{jwt}\, dw$$



Anche con le trasformate di Fourier la convoluzione in t diventa prodotto in X

FINE PARENTESI

DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA (SPETTRO)

Def: x(t) P.C. stazionario

$$\Gamma_{xx}(w) := \mathcal{F}[\gamma_{xx}(\cdot)] = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma_{xx}(\tau)\, e^{-jw\tau}$$

invece di guardare Media e autocovarianza è + comodo lavorare con Media e densità spettrale di potenza

- Spesso si fa riferimento anche alla trasf. Z

$$\Phi_{xx}(z) := \mathcal{Z}[\gamma_{xx}(\cdot)] = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma_{xx}(\tau)\, z^{-\tau}$$ → DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA

Esempio: $y(t) = w(t) + 0{,}5\, w(t-1)$ $w(\cdot) \sim WN(0,1)$
↳ rumore bianco ritardato di un passo.

... conti ...

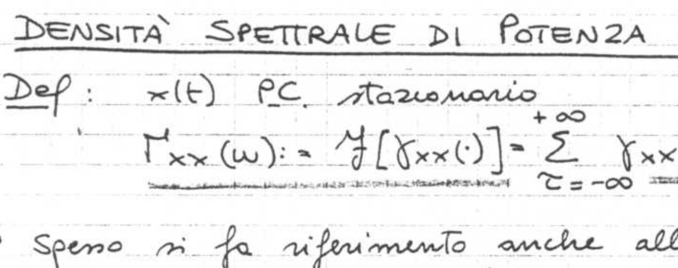
$$\Phi_{yy}(z) = 0{,}5z + 1{,}25 + 0{,}5z^{-1}$$ $z = e^{jw}$

$$\Gamma_{yy}(w) = 0{,}5e^{jw} + 1{,}25 + 0{,}5e^{-jw}$$

Di solito $\mathcal{F}$ è una fz complessa

$$= 0{,}5(\cos w + j\cancel{\sin w}) + 1{,}25 + 0{,}5(\cos w - j\cancel{\sin w}) = \underline{1{,}25 + \cos(w)}$$

NON è un caso ← fz Reale



periodico di periodo 2π

PROPRIETÀ : $\Gamma_{xx}(w)$ è sempre

- Reale
- Pari $(\Gamma_{xx}(-w) = \Gamma_{xx}(w))$
- ≥ 0
- 2π - periodico
- AntiTrasformata : $\gamma_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_{xx}(w)\, e^{jw\tau}\, dw$

Un processo che sottende un'area grande ha una varianza elevata!

NB

⇓

è la Varianza ← $\gamma_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_{xx}(w)\, dw. \Rightarrow \underline{\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_{xx}(w)\, dw = 2\pi\, Var[x(t)]}$

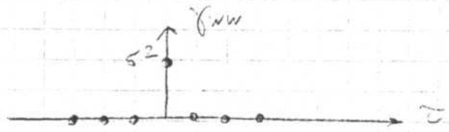
(*) l'area è ∝ Var

Se $E[x(t)] = 0$, l'area sottesa da $\Gamma_{xx}/2\pi$ mi fornisce la potenza media

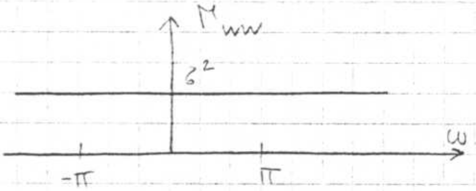
(dice quanto è forte un segnale → posso confrontare gli spettri dei segnali e stabilire quale ha energia maggiore).

<u>Esempio</u> : $w(\cdot) \sim WN(0, \sigma^2)$

$$\gamma_{ww}(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases}$$

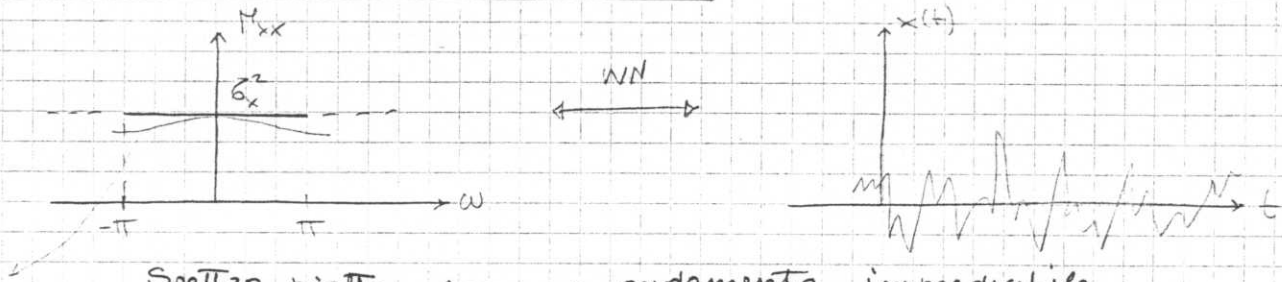


$$\Phi_{ww}(z) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma_{ww}(\tau) z^{-\tau} = \sigma^2 \qquad \Gamma_{ww}(\omega) = \sigma^2$$



→ Lo spettro giustifica il nome "rumore bianco" perché questo spettro rappresenta con le onde elettromagnetiche la luce bianca (che è unione di tutti i colori ⇒ tutte le freq ⇒ è impredicibile).

IMPARIAMO A LEGGERE LO SPETTRO

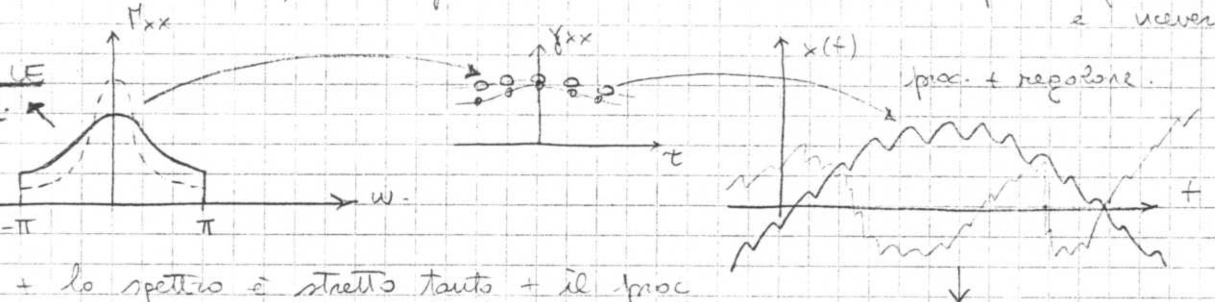


<u>Spettro piatto</u> ⟷ <u>andamento impredicibile</u>

in questo caso il proc è largamente (NON totalmente) impredicibile

c'è una dualità tra la fz di autocovarianza e lo spettro ($\perp \Rightarrow \overline{\uparrow}$ e viceversa)

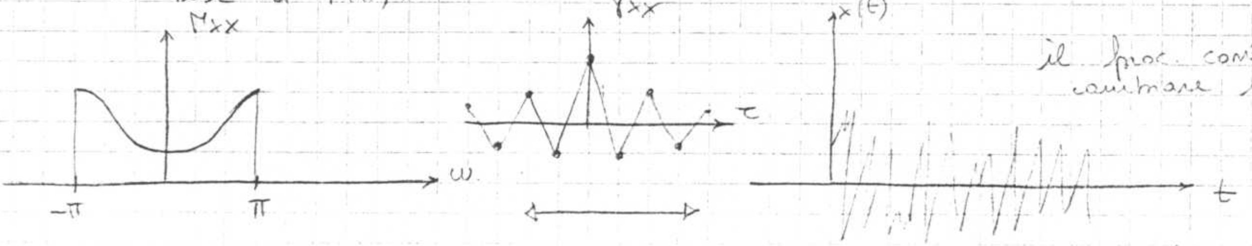
<u>PREDOMINANO LE BASSE FREQ.</u>
↓
più piccolo
↓
imp. base



Quanto + lo spettro è stretto tanto + il proc tende a stare sopra (o sotto) il valor medio

↓
<u>ANDAMENTO REGOLARE</u>

<u>Esempio</u> : per creare un PC potrei scegliere e sommare + sinusoidi con fase uniforme, ampiezza gaussiana e freq. scelte a caso (sinusoide + lenta + grande di quelle veloci se scelgo la varianza in base a Γ_{xx}).



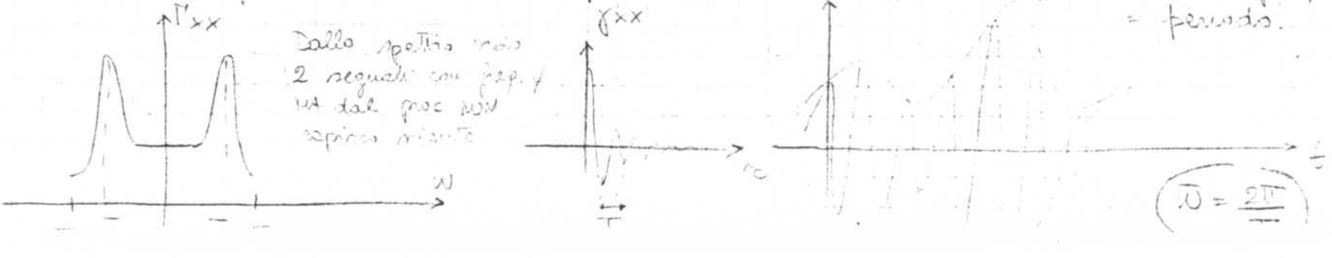
il proc continua a cambiare segno

<u>PREDOMINANO LE ALTE FREQ</u>

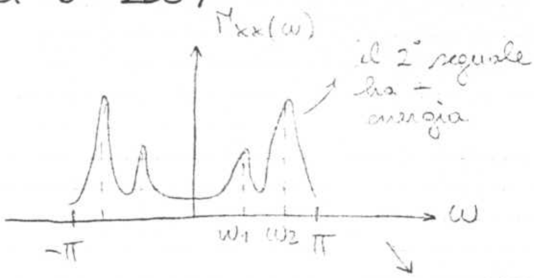
↳ (ci dò + peso alle sinusoidi rapide)

<u>ANDAMENTO IRREGOLARE</u> (predicibile)

T → distanza picco-picco = periodo.

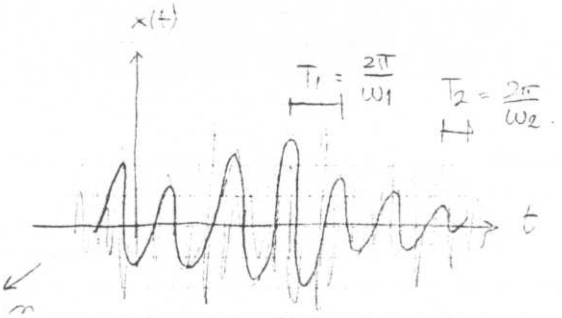


1-6-2001



il 2° segnale ha + energia

Si vedono bene i 2 segnali



NON si capisce nulla

STIMA DELLA $\gamma(\cdot)$

Ipotesi:

- $x(\cdot)$ P.C. stazionario ergodico (scalare)
- $E[x(t)] = 0$
- Dati disponibili: $x(t)$, $t = 0, \dots N-1$

Se lo faccio con passo 1 ho solo N-1 repliche, se lo faccio con 2 passi me ne mancano 2

$\boxed{\text{Possibile stimatore}}$:

$$\longrightarrow \quad c'_{xx}(\tau) := \frac{1}{N-|\tau|} \sum_{i=0}^{N-|\tau|-1} x(i)\,x(i+\tau) \qquad |\tau| < N$$

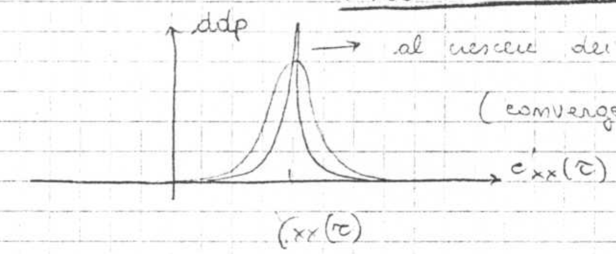
$$\left(\gamma_{xx}(\tau) := E[x(t)\,x(t+\tau)] \right)$$

$E[x(t)] = 0$

$$\frac{1}{N-|\tau|} \cdot (N-|\tau|)\, E[x(i)\,x(i+\tau)]$$

OSSERVAZIONI:

- $E[c'_{xx}(\tau)] = \gamma_{xx}(\tau)$ (stimatore non polarizzato)
- Per τ fissato $\lim_{N \to \infty} \text{Var}[c'_{xx}(\tau)] = 0$



→ al crescere dei dati → δ_{DIRAC}

(convergenza in media quadratica)

$\Rightarrow$ **STIMATORE CONSISTENTE**

Purtroppo NON abbiamo MAI $N = \infty$

- Per N fissato si vede che per $\tau \cong N$ $\text{Var}[c'_{xx}(\tau)]$ è grande perché ho pochi termini nella sommatoria — sono 2 n° $\Rightarrow$ potrebbero essere "brutti"

CASO LIMITE: $c'_{xx}(N-1) = x(0)\,x(N-1) \rightarrow$ fatto sgradevole

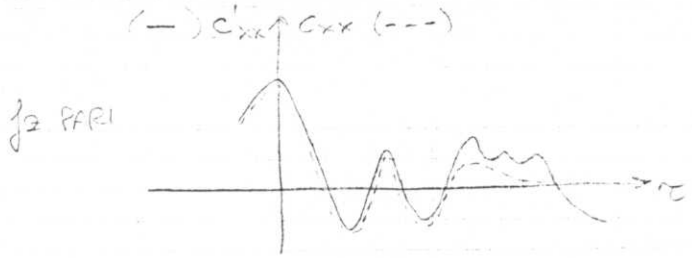
$\boxed{\text{Stimatore alternativo}}$:

$$\longrightarrow \quad c_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-|\tau|-1} x(i)\,x(i+\tau)$$

OSS:

- $c_{xx}(\tau) = \frac{N-|\tau|}{N} c'_{xx}(\tau) \Rightarrow E[c_{xx}(\tau)] = \frac{N-|\tau|}{N} \gamma_{xx}(\tau) \Rightarrow$ è polarizzato, ma è asintoticamente non polarizzato.
- Per τ fissato (al crescere di N) $\Rightarrow$ stimatore consistente
- Per N fissato e $\tau \cong N$, $E[c_{xx}(\tau)]$ diminuisce al crescere di $\tau \Rightarrow$

peggiora la polarizzazione ai bordi.



$$C_{xx}(N-1) = \frac{x(0)x(N-1)}{N}$$

tendo a schiacciare la stima

NONOSTANTE TUTTO, se ho pochi dati è meglio lo stimatore che si schiaccia a zero (perché in effetti negli stimatori la f.z di autocov. dovrebbe tendere a zero) piuttosto che un valore del tutto casuale.

MORALE: meglio propendere per lo zero che dare i numeri "a caso" (la maggior parte dei PC staz. è tale che: $\lim_{|\tau|\to\infty} \gamma(\tau) = 0$)

Per prudenza considero $C_{xx}(\tau)$ solo per $\boxed{|\tau| \le N/4}$

(NB: $\exists$ gli intervalli di confidenza di questi stimatori MA sono troppo complessi e dipendono fortemente dal tipo di processo).

STIMA DELLO SPETTRO

IDEA: Invece di trasformare secondo Fourier la γ_{xx}, trasformo C_{xx}

Def: PERIODOGRAMMA

$$\longrightarrow \quad I_N(\omega) := \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} C_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau}$$

$\rightarrow$ NB NON faccio Σ da $-\infty$ a $+\infty$ perché fuori da $[-(N-1), N-1]$ NON so com'è C_{xx} $\Rightarrow$ la considero nulla.

ASPETTI COMPUTAZIONALI:

Sia $X(e^{j\omega}) := \sum_{t=0}^{N-1} x(t) e^{-j\omega t}$ la trasf. di $\mathcal{F}$ della sequenza $x(t)$, $0 \le t \le N-1$

(*) si può calcolare senza bisogno di C_{xx}

PROPRIETA': $I_N(\omega) = \frac{1}{N}|X(e^{j\omega})|^2$ N^2 operazioni (la complessità aumenta col quadrato)

Def (DFT): $X(h) := \sum_{t=0}^{N-1} x(t) e^{-jh\phi t}$ $\quad \phi := \frac{2\pi}{N} \quad h = 0, \dots N-1$

Trasformata di Fourier Discreta

PROPRIETÀ: $X(h) = X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}h}\right)$

NOTA: La DFT può essere calcolata in $O(N \lg N)$ operazioni mediante la FFT (Fast Fourier Transform)

In Matlab si può stimare il periodogramma con l'istruzione:

```
(abs(fft(x)).^2)/N
```

x = vettore dei dati

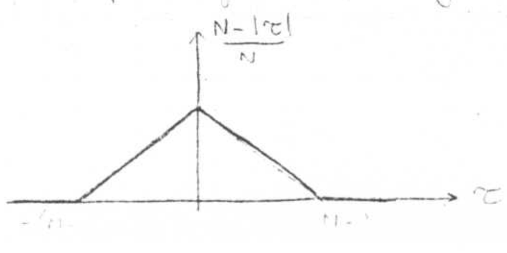
OSS

- $E[I_N(\omega)] = \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \left(\frac{N-|\tau|}{N}\right) \gamma_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} \ne \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} = \Gamma_{xx}(\omega)$

il periodogramma sbaglia perché $\rightarrow$ (1) la Σ non va da $-\infty$ a $+\infty$

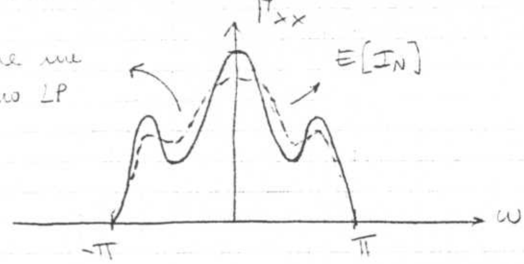
$\rightarrow$ (2) c'è il fattore $\left(\frac{N-|\tau|}{N}\right)$

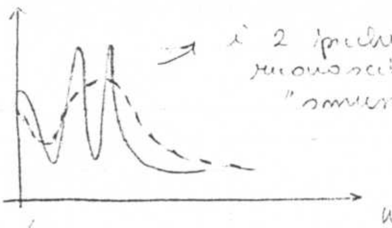
è come moltiplicare la γ per questa finestra triangolare



$\Rightarrow$ è uno stimatore polarizzato (ma asintoticamente NON polarizzato)

i come un filtraggio LP





i 2 picchi NON sono riconoscibili (vengono "smussati").

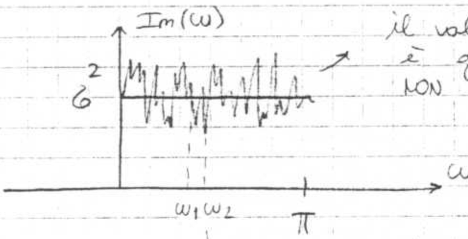
$\hookrightarrow$ è come avere 2 sinusoidi simili
$\rightarrow$ con pochi dati NON si distinguono
$\rightarrow$ servono tanti dati

Soluzione: avere tanti dati

- $Var[I_N(\omega)] \cong \underbrace{\Gamma_{xx}(\omega)^2}_{\text{valore dello spettro in } \omega}$ $\rightarrow$ NON dipende da N!! ($\Rightarrow$ non c'è speranza che vada a zero).

- $cov[I_N(\omega_1), I_N(\omega_2)] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad \omega_1 \neq \omega_2$

Esempio: P.C. $x(\cdot) \sim WN(0, \sigma^2)$ abbiamo questo segnale MA NON sappiamo che è rumore bianco.



il valor medio è questo MA NON è cost

$\hookrightarrow$ se guardiamo la cov = 0

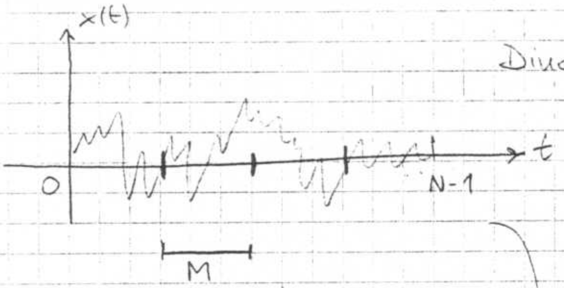
Vuol dire che se in ω_1 sono sopra la media NON so nulla su ω_2 (VS dovrei sapere che è uguale).

$\Downarrow$

Il Periodogramma NON è un buon stimatore

Si cerca di compensare con:

MEDIA DI PERIODOGRAMMI (Metodo di Bartlett) $\rightarrow$ Buona tecnica xchè NON fa HP sul proc.



Divido $[0, N-1]$ in intervalli tutti lunghi M $\rightarrow$ periodogramma su ciascuno poi faccio la media

- Calcolo $K = \frac{N}{M}$ periodogrammi e ne faccio la **media** $\Rightarrow$ riduco la varianza(*) ($\rightarrow$ varianza ridotta di $\frac{M}{N}$)

4 periodogr. $\Rightarrow$ Var ridotta di $\frac{1}{4}$.

(*) in realtà sarebbe vero se i periodogrammi fossero INDIPENDENTI

- Polarizzazione: è quella di $I_M(\omega)$

(FB) Per ridurre la varianza $\rightarrow$ tante finestre MA finestre troppo piccole $\rightarrow$ period. peggiore

- Se so che lo spettro ha dei picchi sottili dovrò scegliere M abbastanza grande (MA avrò meno "finestre" $\Rightarrow$ meno riduzione della var).

(FB) Quante finestre usare? Si va per tentativi!

Usando finestre accavallate (metodo di Welch) posso averne tante anche con pochi dati MA perdo tot l'indipendenza.

5-6-2001

P.C. CONGIUNTI

La descrizione probabilistica di due P.C. congiunti $X(t)$ e $Y(t)$ non è niente altro che la descrizione probabilistica del PC vettoriale $\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}$

Def: $X(t)$ e $Y(t)$ sono detti indipendenti se il vettore di v.c. $[x(t_1), x(t_2) \dots x(t_N)]^T$ è indipendente dal vettore di VC $[Y(t_1') \; Y(t_2') \dots Y(t_M')]$, $\forall t_1, \dots t_N, t_1' \dots t_M', \; \forall N, M$

→ Conoscere uno o più valori di $x(t)$ non mi dice nulla su nessun valore di $y(\tau)$

NB Se li confrontassi allo stesso istante potrei vederli ≠ anche se $x(t) = y(t-1)$

Def
- **Funzione di CROSSCORRELAZIONE**

$$R_{XY}(t_1, t_2) := E[X(t_1) Y(t_2)^T] = R_{YX}(t_2, t_1)^T$$

- **Funzione di CROSSCOVARIANZA**

$$\gamma_{XY}(t_1, t_2) := E[(X(t_1) - m_X(t_1))(Y(t_2) - m_Y(t_2))^T] = \gamma_{YX}(t_2, t_1)^T$$

- X e Y si dicono INCORRELATI se $\gamma_{XY}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1, t_2$

Indipendenza $\Rightarrow$ incorrelazione
$\not\Leftarrow$ tranne che nel caso gaussiano per cui $\Leftrightarrow$

- **Funzione di CROSSCOVARIANZA NORMALIZZATA**

$$r_{XY}(t_1, t_2) := \frac{\gamma_{XY}(t_1, t_2)}{\sqrt{\gamma_{XX}(t_1, t_1)\, \gamma_{YY}(t_2, t_2)}} \leq 1$$

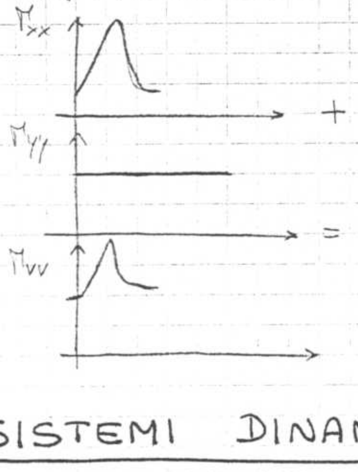
- CROSS-SPETTRO → trasformata di Fourier della cross-covarianza.

PROPOSIZIONE: Sia $v(t) := x(t) + y(t)$ dove $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ sono P.C. stazionari INCORRELATI. Allora,

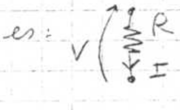
$$\gamma_{vv}(\tau) = \gamma_{xx}(\tau) + \gamma_{yy}(\tau)$$
$$\Gamma_{vv}(\omega) = \Gamma_{xx}(\omega) + \Gamma_{yy}(\omega)$$
$$\Phi_{vv}(z) = \Phi_{xx}(z) + \Phi_{yy}(z)$$

NB

Se NON vale questa proprietà bisognerebbe aggiungere le cross-covarianze (o i cross-spettri).



Sistema STATICO → modellizzato con una relazione istantanea tra ingressi e uscite

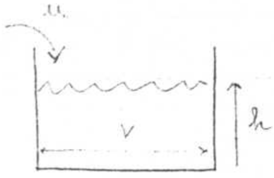
es:


$I = \frac{V}{R}$ (V = u, I = y)

$y = \theta u$

$\theta := \frac{1}{R}$

SISTEMI DINAMICI

es:


$V\dot{h} = q = u$

→ sistema dinamico xchè ha memoria (h dipende dal livello iniziale)

Per distinguere i sistemi statici da quelli dinamici basta guardare le relazioni:

- algebriche ⇒ statico
- eq differenziali ⇒ dinamico

↓

anche eq alle derivate parziali

NB dinamico → eq differenziale

eq. alle differenze → es: $x(t+1) = f(x(t), u(t))$

Consideriamo **SISTEMI LINEARI INVARIANTI**

es: se raddoppio i valori delle cause gli effetti raddoppiano (se le condizioni iniziali sono nulle).

S non muta le sue caratteristiche al variare del tempo

$$\underset{\text{ingresso}}{\xrightarrow{u(t)}} \boxed{S} \underset{\text{uscita}}{\xrightarrow{y(t)}}$$

Supponiamo u e y scalari (caso + semplice)

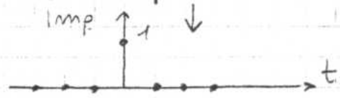
Tutti questi sistemi obbediscono alla seguente relazione:

$$\boxed{y(t) = \underbrace{\sum_{i=-\infty}^{t} g(t-i)\,u(i)}_{\text{Convoluzione discreta tra le cause e la fz } g(t)} = \sum_{J=0}^{\infty} g(J)\,u(t-J)}$$

$g(t)$:= risposta all'impulso ($g(t) = y(t)$ quando $u(t) = imp(t)$)

NOTA $g(t)$ conosciamo TUTTO del sistema

impulso discreto →



↳ es: iniezione endovenosa in formacocinetica

Ipotesi: $g(t) = 0 \quad t < 0$

↳ sistema causale: gli effetti si vedono solo DOPO le cause!

Def: FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$\longrightarrow G(z) := \sum_{t=0}^{+\infty} g(t) z^{-t} = \mathcal{Z}[g(t)]$$

- $Y(z) = G(z)\,U(z)$ $\qquad \xrightarrow{u} \boxed{G(z)} \longrightarrow y$

- Se il legame tra u e y è esprimibile mediante un' eq. alle differenze del tipo:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{Ma} a_i\, y(t-i) + \sum_{i=0}^{Mb} u(t-i)$$

il sistema è detto "a dimensioni finite" → Per condensare la stori del sistema quante variabili ci vogliono?
→ In questo caso ne basta un n° finito

Esempio:

$$y(t) = a\,y(t-1) + u(t) + b\,u(t-1)$$

$$Y(z) = a\underbrace{z^{-1}Y(z)}_{\mathcal{Z}[y(t-1)]} + U(z) + b z^{-1} U(z)$$

$$(1 - a z^{-1})\,Y(z) = (1 + b z^{-1})\,U(z) \rightarrow Y(z) = \underbrace{\frac{1 + b z^{-1}}{1 - a z^{-1}}}_{G(z)}\,U(z)$$

$$Y(z) = \frac{z+b}{z-a}\,U(z)$$

Per i sistemi a dimensioni finite $G(z)$ è un rapporto di polinomi:

$$G(z) = \frac{\sum_{0}^{Mb} b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^{Na} a_i z^{-i}} = \frac{N_G(z)}{D_G(z)}$$

Radici di $N_G(z)$: zeri

" " $D_G(z)$: poli

D'ora in poi $G(z)$ = rapporto di polinomi

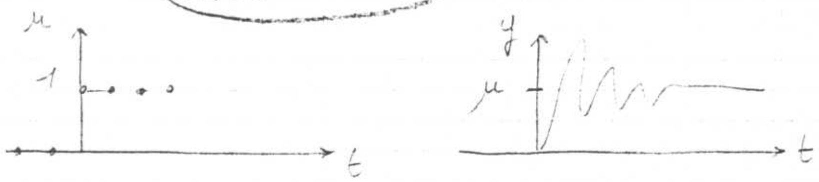
- STABILITÀ: Il sistema è (asintoticamente) stabile se e solo se

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$$

- guadagno: $\mu := G(1) = \sum_{t=0}^{\infty} g(t)$

PROPRIETÀ: Se il sistema è stabile e $\mu < \infty$ e applico $u(t) = sca(t)$

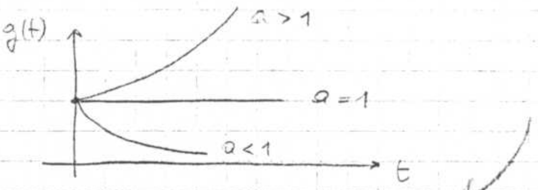
$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \mu$$



- Poli e stabilità

Esempio: $y(t) = a\,y(t-1) + u(t)$ $\quad Y(z) = a z^{-1} Y(z) + U(z)$

$$Y(z) = \underbrace{\frac{z}{z-a}}_{G(z)} U(z) \qquad \text{Polo in } z = a$$



Risposta impulsiva: $g(t) = a^t \quad t \geq 0$

Stabile se e solo se $|a| < 1$

In generale il sistema è stabile se e solo se tutti i poli hanno modulo < 1

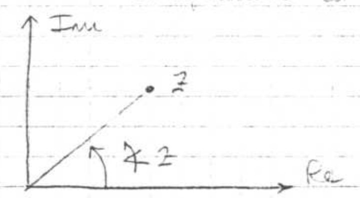
- Risposta in frequenza

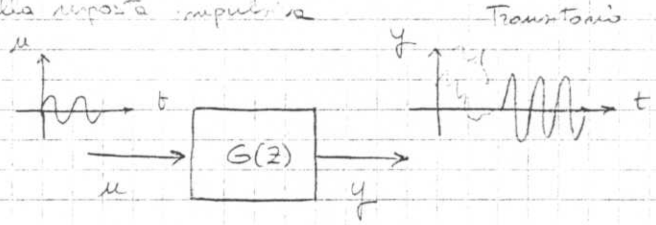
Sia $u(t) = A \sin(\omega t)$. Allora se il sist. è stabile, a regime (a meno del transitorio)

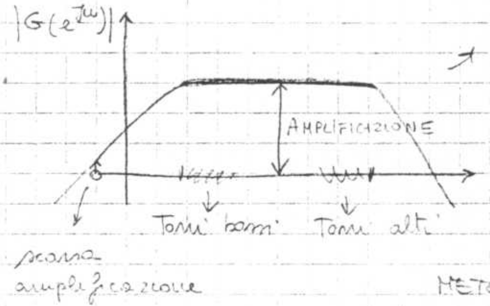
$$y(t) = A\,|G(e^{j\omega})| \sin(\omega t + \measuredangle G(e^{j\omega}))$$

$G(e^{j\omega})$ è un n° complesso

trasformata di Fourier della risposta impulsiva







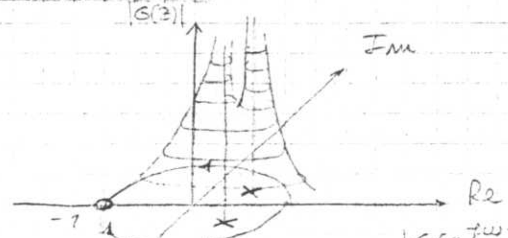
andamento dello stereo

NB Un segnale può essere scomposto in somma di sinusoidi a freq ≠

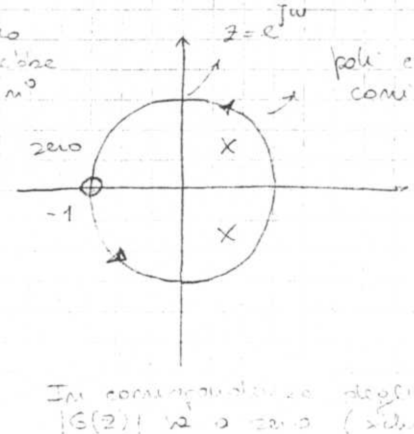
→ Le distorsioni di fase sono poco importanti xchè l'orecchio umano non se ne accorge

METODO DEL TENDONE DA CIRCO!

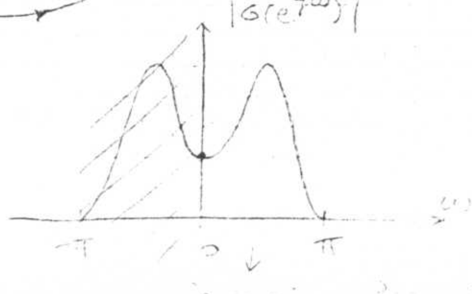
- Modo rapido per intuire la forma di $|G(e^{j\omega})|$ quando sono noti poli e zeri di $G(z)$:



x avere un buono stereo bisognerebbe avere un buon n° di poli e zeri



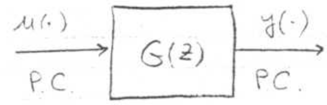
poli complessi coniugati



In corrispondenza degli zeri $|G(z)|$ va a zero (perché sono radici del num.) VS in corrispondenza dei poli va a ∞ (perché sono radici del denominatore)

6 - 6 - 2001

SISTEMI LINEARI (CON INGRESSI) STOCASTICI



es: ingresso = profilo stradale (NON deterministico).
sistema dinamico = amortizzatore etc...
uscita = vibrazioni del guidatore

Ipotesi: $u(\cdot)$ P.C. stazionario e $G(z)$ stabile

Noti media, autocovarianza e spettro di $u(\cdot)$ come sono fatti media, autocovarianza e spettro di $y(\cdot)$?

MEDIA: $E[y(t)] = E\left[\sum_{i=0}^{\infty} g(i)\, u(t-i)\right] = \sum_{i=0}^{\infty} g(i)\, \underbrace{E[u(t-i)]}_{\text{è cost} \Rightarrow \text{fuori da } \Sigma} = m_u \cdot \sum_{i=0}^{\infty} g(i) =$

$= G(1)\cdot m_u = \mu \cdot m_u$

$$\boxed{m_y = \mu \cdot m_u}$$

Autocovarianza troppo complicata da calcolare! (convoluzioni)

TEOREMA: Se $u(\cdot)$ è un PC stazionario e il sistema è stabile, allora anche $y(\cdot)$ è un PC stazionario (se NON lo fosse non potrei parlare di spettro di $y(\cdot)$).
(Ipotesi: parto da $t = -\infty$ in modo da non avere il pb del Transitorio

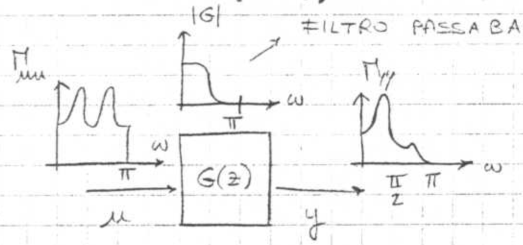
Passiamo agli SPETTRI

Teorema:

Risposta in freq.

$$\Gamma_{yy}(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2\, \Gamma_{uu}(\omega)$$

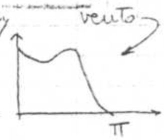
$$\Phi_{yy}(z) = G(z)G(z^{-1})\Phi_{uu}(z)$$



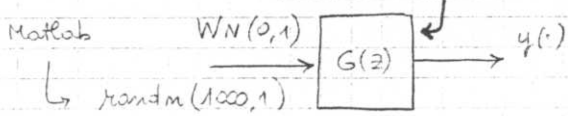
es: Filtro LP → serve x amortizzare le asperità del terreno

Filtro LP → serve per eliminare i fruscii (WN ad alta freq.) sulle cassette → pago il filtraggio distorcendo un po' i Toni alti

• Idea: se voglio simulare un PC con un certo spettro $\bar{\Gamma}_{yy}$, cerco una $G(z)$ tale che $|G(e^{j\omega})|^2 = \bar{\Gamma}_{yy}(\omega)$



SHAPING FILTER



$\Longrightarrow$ $\Gamma_{yy}(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2 \cdot 1 = \bar{\Gamma}_{yy}(\omega)$

lo spettro di WN è = alla sua varianza cioè 1

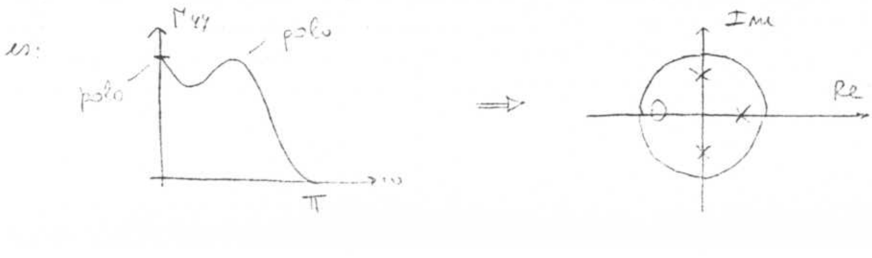
es:
$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots$
$A(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots$
$G(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)}$

in Matlab: B = [bo b1...] A = [ao a1...]

u = randn(1000,1) ; y = filter (B, A, u) simulazione del vento

Dato che WN ha uno spettro piatto devo usare uno SHAPING FILTER per ottenere l'uscita desiderata

es:



a trova tabile autoregressivi

PROCESSI MA, AR E ARMA → autoregressivo a media mobile

<u>Def</u>: Un PC stazionario $y(\cdot)$ è detto a spettro razionale, se $\exists\, G(z)$ rapporto di polinomi, con poli < 1 in modulo, tale che $\Phi_{yy}(z) = \sigma^2 G(z) G(z^{-1})$

$$WN(0,\sigma^2) \longrightarrow \boxed{\frac{N_G(z)}{D_G(z)}} \xrightarrow{\;y(\cdot)\;}$$

→ si potrebbe avere $G(z)$ qualunque MA serve solo a complicarci la vita.

Se $G(z)$ fosse trascendente potrei approssimarla con polinomi di grado elevato → il rapporto di polinomi non può rappresentare proprio tutto!

PROCESSI MA(n) (MOVING AVERAGE)

WN è comodo per i modelli MA non $\exists$ in natura

$$y(t) = c_0 w(t) + c_1 w(t-1) + \dots + c_n w(t-n)$$

$$w(\cdot) \sim WN(0,\sigma^2)$$

- Se $w(\cdot)$ è gaussiano anche $y(\cdot)$ è gaussiano
- fdt dello shaping filter:

$$Y(z) = c_0 W(z) + c_1 z^{-1} W(z) + \dots + c_n z^{-n} W(z)$$

$$Y(z) = (c_0 + c_1 z^{-1} + \dots c_n z^{-n}) W(z) = G(z) W(z)$$

$$\rightarrow \quad G(z) = \frac{c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n}{z^n}$$

i) n zeri (radici del num.)

ii) n poli nell'origine $\Rightarrow G(z)$ è stabile $\Rightarrow y$ è stazionario

- Valore atteso:

$$E[y(t)] = \sum_{i=0}^{n} c_i E[w(t-i)] = 0 \quad (= G(1) E[w(t)])$$

nei sistemi a tempo discreto il guadagno statico NON è $G(0)$ MA $G(1)$

valore atteso di WN = 0

- Autocovarianza:

<u>Esempio</u> MA(2) $\quad y(t) = c_0 w(t) + c_1 w(t-1) + c_2 w(t-2)$

i 3 termini sono incorrelati ⇒ Σ di varianze

$$\gamma_{yy}(\tau) = E[y(t) y(t+\tau)]$$ → + semplice xchè il valore atteso di $w = 0$

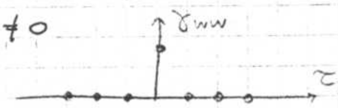
$$\gamma_{yy}(0) = Var[y(t)] = c_0^2 Var[w(t)] + c_1^2 Var[w(t-1)] + c_2^2 Var[w(t-2)]$$
$$= (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2)\sigma^2$$

↳ essendo un Proc stazionario le Var sono = tra di loro

$$\gamma_{yy}(1) = E[y(t) y(t+1)] = E[(c_0 w(t) + c_1 w(t-1) + c_2 w(t-2)) \cdot (c_0 w(t+1) + c_1 w(t) + c_2 w(t-1))] = \dots$$

NOTA: $E[w(t) w(t+\tau)] = 0 \quad \forall \tau \neq 0$

$$\gamma_{ww}(\tau) = E[w(t) w(t+\tau)]$$



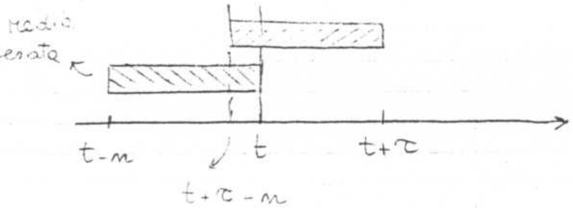
$$\dots = c_0 c_1 \underbrace{E[w(t)^2]}_{\sigma^2} + c_1 c_2 \underbrace{E[w(t-1)^2]}_{\sigma^2} = (c_0 c_1 + c_1 c_2)\sigma^2$$

coincide con la varianza xchè $E[w] = 0$

$$\gamma_{yy}(2) = E[y(t) y(t+2)] = E[(c_0 w(t) + c_1 w(t-1) + c_2 w(t-2))(c_0 w(t+2) + c_1 w(t+1) + c_2 w(t))] = c_0 \cdot c_2 \cdot E[w(t)^2] = c_0 c_2 \cdot \sigma^2$$

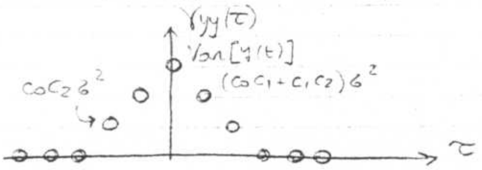
$$\gamma_{yy}(3) = E[y(t) y(t+3)] = 0$$

$$\gamma_{yy}(\tau) = 0 \quad |\tau| \geq 3 \qquad (\gamma \text{ è una fz pari})$$



$$\gamma_{yy}(\tau) = E[y(t)\,y(t+\tau)]$$

quando le 2 finestre si disgiungono l'autocovarianza va a zero
(vero in generale)



In generale:

$$\gamma_{yy}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > m \\ (c_0 c_\tau + c_1 c_{\tau+1} + \dots c_{m-\tau} c_m)\sigma^2, & |\tau| \le m \end{cases}$$

In particolare $\underline{Var[y(t)] = (c_0^2 + c_1^2 + \dots c_m^2)\,\sigma^2}$ ←

- La rappresentazione data è ridondante

Se definisco $\tilde{c}_i := \alpha c_i$, $\tilde{\sigma}^2 := \sigma^2/\alpha^2$, $\tilde{y}(t) := \sum_{i=0}^{m} \tilde{c}_i\, \tilde{w}(t-i)$, $\tilde{w}(\cdot) \sim WN(0, \tilde{\sigma}^2)$

si vede subito che $\tilde{y}(\cdot)$ ha le stesse proprietà statistiche di $y(\cdot)$

il prodotto e la divisione per α si compensano

Per evitare di avere modelli apparentemente ≠ Ma fondamentalmente =

di solito si fissa $\boxed{c_0 = 1}$

- Spettro $\boxed{\Phi_{yy}(z) = G(z)\,G(z^{-1})\,\sigma^2}$

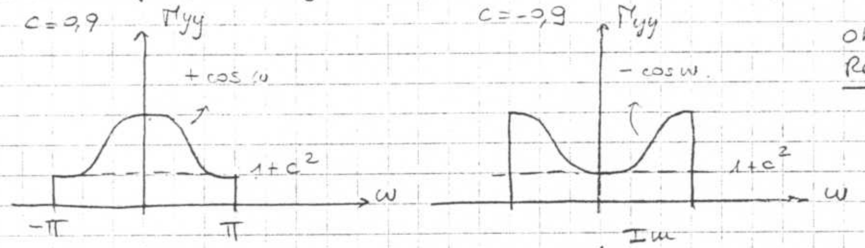
Esempio: $y(t) = w(t) + c\,w(t-1)$ $\quad w(\cdot) \sim WN(0, \sigma^2)$ $\quad G(z) = 1 + c z^{-1} = \frac{z+c}{z}$

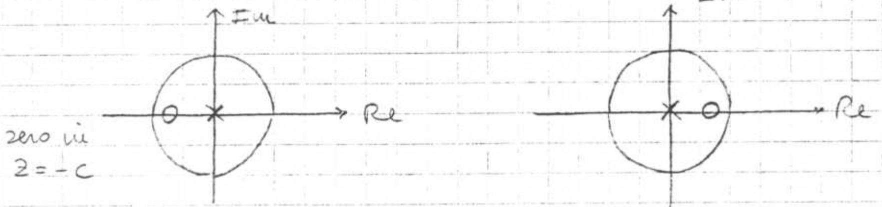
$$\Phi_{yy}(z) = \sigma^2 (1 + c z^{-1})(1 + c z) = \sigma^2 (c z^{-1} + (1+c^2) + c z)$$

$$\Gamma_{yy}(\omega) = \Phi_{yy}(e^{j\omega}) = \sigma^2 (c e^{-j\omega} + (1+c^2) + c e^{j\omega}) = \dots$$ NB: $e^{j\omega} = \cos\omega + j \sin\omega$

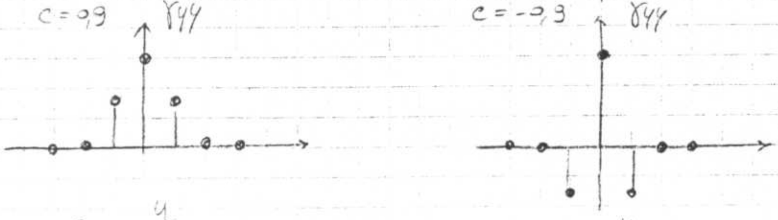
$$\dots = \sigma^2 (c(\cos\omega - j\sin\omega) + (1+c^2) + c(\cos\omega + j\sin\omega)) = \sigma^2 (1 + c^2 + 2c\cos\omega)$$

OK xché lo spettro deve essere Reale, positivo, pari!





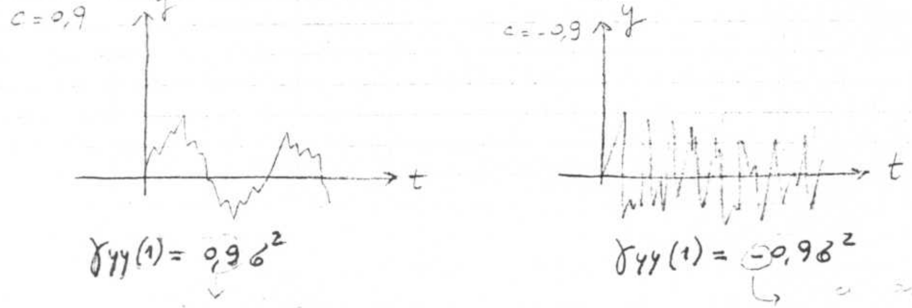
$$\gamma_{yy}(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau > 2 \\ c\sigma^2 & \tau = 1 \\ (1+c^2) & \tau = 0 \end{cases}$$



con MATLAB:

```
C = [1 c];  W = randn(200,1)
y = filter(C,1,W); plot(y)
```

al variare di c
↓
cambiando il modello MA si possono ottenere processi con caratteristiche ≠



$\gamma_{yy}(1) = 0{,}9\,\sigma^2$ $\quad\quad$ $\gamma_{yy}(1) = -0{,}9\,\sigma^2$

è + regolare $\quad\quad$ ci aspettiamo che oscilli

PROCESSI AR(n) (AUTO REGRESSIVE)

componente casuale

Def: $y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_n y(t-n) + w(t)$ $\qquad w(\cdot) \sim WN(0, \sigma^2)$

- f.d.t $\quad Y(z) = a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \dots a_n z^{-n} Y(z) + W(z)$

$$Y(z)\left[1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots a_n z^{-n}\right] = W(z)$$

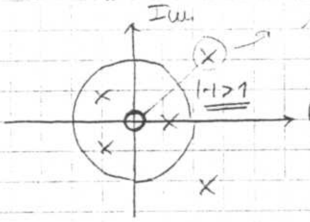
$$Y(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots a_n z^{-n}} \cdot W(z) = G(z) W(z)$$

$$G(z) = \frac{z^n}{z^n - a_1 z^{n-1} + \dots - a_n}$$

(i) n zeri nell'origine

(ii) n poli → la stabilità NON è più garantita!!

7-6-2001



potrebbero essere poli est a seconda dei coeff $a_1, a_2 \dots a_n$

- A differenza del caso MA(n), $y(\cdot)$ non è detto che sia un PC stazionario (dipende dai poli).

Caso + favorevole → Se i poli hanno tutti **modulo < 1** si dimostra che $y(\cdot)$ converge ad un P.C. stazionario che prende il nome di **processo AR(n)** (considero che l'effetto del transitorio iniziale sia esaurito).

↳ Quando parte la simulazione metto a zero le varie y e considero solo il WN in fondo → la simulazione deve essere lunga (se n=100 la protraro fino a 1000)

- Valore atteso e autocovarianza

Esempio $\quad y(t) = a y(t-1) + w(t) \longrightarrow AR(1) \qquad w(\cdot) \sim WN(0, \sigma^2)$

Ipotesi: $|a| < 1$ → se $|a| > 1$ il sist NON è stabile ⇒ il proc non è stazionario

$E[y(t)] = a E[y(t-1)] + \underset{= 0}{E[w(t)]}$ - A regime $y(\cdot)$ è stazionario ⇒

- $E[y(t)] = E[y(t-1)] \Rightarrow E[y(t)] = a E[y(t)] \Rightarrow (1-a) E[y(t)] = 0$ Ma $a \neq 1$

$\Rightarrow E[y(t)] = 0$

Cosa succede se $w(\cdot) \sim WN(m_w, \sigma^2)$?

$E[y(t)] = a E[y(t-1)] + m_w$ → a regime → $(1-a) E[y(t)] = m_w \Rightarrow$

$$E[y(t)] = \frac{m_w}{1-a} = G(1) \cdot m_w$$ (IDEM per MA(n))

ATTENZIONE AI TEMI D'ESAME: se $E[w] \neq 0$ bisogna fare i conti

- autocovarianza

$Var[y(t)] = Var[a y(t-1) + w(t)]$

↳ è posteriore a $y(t-1)$ che dipende da tutti i $w(\cdot)$ precedenti MA NON da $w(t)$! ⇒ incorrelati

$$Var[y(t)] = a^2 Var[y(t-1)] + \sigma^2$$

A regime, $Var[y(t-1)] = Var[y(t)] \Rightarrow (1-a^2) Var[y(t)] = \sigma^2 \Rightarrow Var[y(t)] = \frac{\sigma^2}{1-a^2}$

$$\gamma_{yy}(\tau) = E[y(t)y(t+\tau)]$$

$$y(t)y(t+\tau) = y(t)[a\,y(t+\tau-1) + w(t+\tau)]$$

$w(t+\tau)$ è posteriore a $y(t)$ $\Rightarrow$ sono incorrelati

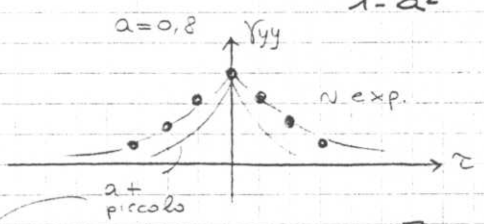
$$E[y(t)y(t+\tau)] = E[y(t)[a\,y(t+\tau-1) + w(t+\tau)]]$$

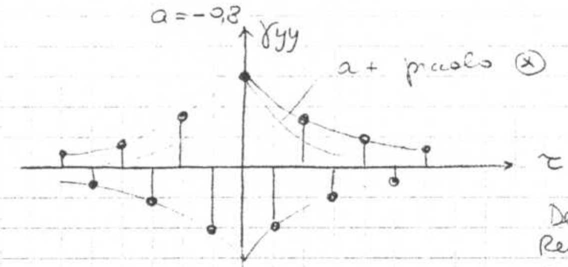
$$\boxed{\gamma_{yy}(\tau) = a\,\gamma_{yy}(\tau-1)} + \underbrace{E[y(t)w(t+\tau)]}_{E[y(t)]E[w(t+\tau)] = 0 \cdot 0}$$

Conosciamo l'autocov al passo zero $\Rightarrow$ $\gamma_{yy}(0) = Var[y(t)] = \sigma^2/(1-a^2)$

$$\gamma_{yy}(0) = \frac{\sigma^2}{1-a^2} \rightarrow \gamma_{yy}(1) = a\gamma_{yy}(0) = \frac{a\sigma^2}{1-a^2} \rightarrow \gamma_{yy}(2) = a\gamma_{yy}(1) = \frac{a^2\sigma^2}{1-a^2}$$

$$\dots \rightarrow \gamma_{yy}(\tau) = \frac{\sigma^2 a^\tau}{1-a^2}$$



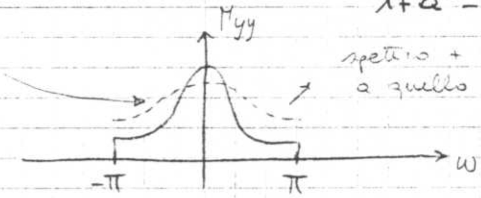


- **Spettro**: $G(z) = \dfrac{z}{z-a}$

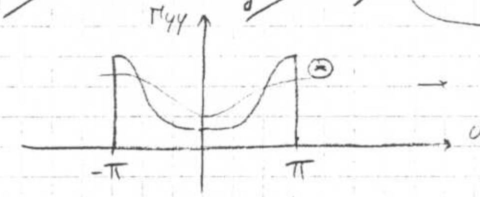
$$\Phi_{yy}(z) = \sigma^2 G(z)G(z^{-1}) = \sigma^2 \frac{z}{z-a} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}-a} = \frac{\sigma^2}{1+a^2-a(z+z^{-1})}$$

$$\Gamma_{yy}(\omega) = \Phi_{yy}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma^2}{1+a^2-a(\cos\omega + \cancel{j\sin\omega} + \cos\omega - \cancel{j\sin\omega})} = \frac{\sigma^2}{1+a^2-2a\cos\omega}$$

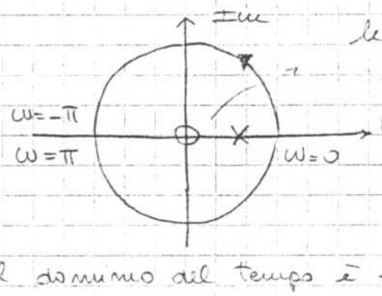
Deve essere
Reale → ok
>0 → verificare
Poli → ok per il cos



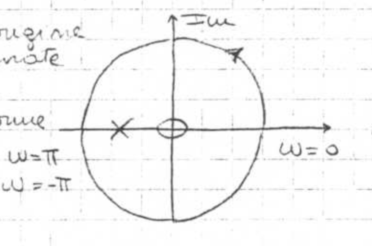
spettro + simile a quello di WN



→ prevalenza delle freq. alte



le singolarità nell'origine possono essere trascurate che il loro effetto è uniforme ovunque



Nel dominio del tempo è + regolare

Nel Tempo è molto irregolare.

<u>PROPRIETÀ GENERALE</u>: i proc AR non hanno <u>MAI</u> autocovarianza NULLA (va a zero molto lentamente ma non ci arriva MAI). vs i proc MA vanno a zero.

ha una MEMORIA pressoché ∞

<u>CASO GENERALE</u> (<u>AR(m)</u> invece di AR(1))

- $\underline{E[y(t)] = 0}$
- Autocovarianza: <u>Equazioni di YULE-WALKER</u>

$$\begin{cases} \gamma(0)a_1 + \gamma(1)a_2 + \dots + \gamma(m-1)a_m = \gamma(1) \\ \gamma(1)a_1 + \gamma(0)a_2 + \dots + \gamma(m-2)a_m = \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(m-1)a_1 + \gamma(m-2)a_2 + \dots + \gamma(0)a_m = \gamma(m) \end{cases}$$

Inoltre:

$$\gamma(1)a_1 + \gamma(2)a_2 + \dots + \gamma(m)a_m = \gamma(0) - \sigma^2$$

N+1 eq. lineari in N+1 incognite

Si dovrebbe verificare che il det $\neq 0$ ($\Rightarrow$ basta mostrare che i poli sono tutti dentro la circonferenza).

Si può usare il sistema anche per il procedimento inverso ⇒ diventa uno strumento di identificazione perché a partire da $\gamma(1)$ $\gamma(2)$ ... posso ricostruire il modello, trovando i coeff $a_1, a_2 \dots$ (poi posso simulare).

$$\begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \gamma(2) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & & \gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \gamma(3) \\ \\ \gamma(n) \end{bmatrix}$$

il pb è capire quanti n usare

se ho troppi coefficienti il modello comincia a seguire il rumore invece dei dati

matrice di Toeplitz simmetrica
↳ tutti gli elementi sulla diagonale sono =

PROCESSI ARMA (n_a, n_c)

il coeff è 1 x evitare modelli =

$$y(t) = \underbrace{a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a)}_{\text{proc. autoregressivo}} + \underbrace{w(t) + c_1 w(t-1) + \dots + c_{n_c} w(t-n_c)}_{\text{proc. a media mobile}}$$

$w(\cdot) \sim WN(0, \sigma^2)$

- fdt

$$\underbrace{(1 - a_1 z^{-1} - \dots a_{n_a} z^{-n_a})}_{A(z)} Y(z) = \underbrace{(1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c})}_{C(z)} W(z)$$

$$G(z) = \frac{C(z)}{A(z)} = \left(\frac{z^{n_c} + c_1 z^{n_c - 1} + \dots c_{n_c}}{z^{n_a} - a_1 z^{n_a - 1} - \dots a_{n_a}} \right) \cdot z^{n_a - n_c}$$

NB I processi MA e AR sono casi particolari del modello ARMA (basta porre i coeff = 0)

Se $n_a > n_c$ ⇒ $n_a - n_c$ zeri nell'origine

Se $n_a < n_c$ ⇒ $n_a - n_c$ poli nell'origine

- Stabilità: se e solo se tutte le radici del denominatore hanno modulo < 1
- Se la fdt è stabile, $y(\cdot)$ tende asintoticamente ad un processo stazionario detto PROCESSO ARMA

Processi a spettro razionale: AR, MA, ARMA

- $E[y(t)] = G(1) E[w(t)] = 0$

Varianza e autocovarianza vanno calcolate di volta in volta

IL PROBLEMA DELLA PREDIZIONE OTTIMA

$x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ siano P.C. congiunti con $y(\cdot)$ misurabile

Casi particolari: $y(t) = x(t)$ $\quad y(t) = x(t) + v(t)$, $v(\cdot) \sim WN$
↳ misura rumorosa di x

Vorrei indovinare x

$\hat{x}(t|\tau)$: stima di $x(t)$ basata su $y(\tau), y(\tau-1), y(\tau-2) \dots$

3 problemi:

1) Trovare $\hat{x}(t+k|t)$: predizione a k passi in avanti
2) Trovare $\hat{x}(t|t)$: filtraggio (ha senso solo se $x \neq y$)
3) Trovare $\hat{x}(t|t+k)$: smoothing (") → avendo + y la previsione è + accurata
↳ y noto fino a t+k → serve anche a ripulire dal rumore il segnale x (pagando un certo ritardo).

Teoria dovuta a Kolmogorov e Wiener (1949)

Bode e Shannon hanno reso la teoria di Wiener ("pericolo giallo") più chiara e + accessibile

Noi consideriamo il problema di trovare $\hat{x}(t+1|t)$ quando $x = y$

8 - 6 - 2001

$\hat{y}(t+1|t)$?

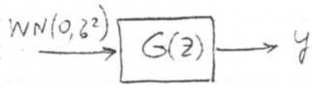
FATTORIZZAZIONE SPETTRALE

Ricordiamo che $\Phi_{yy}(z)$ è detto spettro razionale se $\exists\ G(z)$ rapporto di polinomi stabile tale che $\Phi_{yy}(z) = \sigma^2 G(z) G(z^{-1})$

PROBLEMA: Dato $\Phi_{yy}(z)$ di un P.C. a spettro razionale, trovare tutte le coppie $(G(z), \sigma^2)$ tale che $\Phi_{yy}(z) = \sigma^2 G(z) G(z^{-1})$

$\exists\ \infty$ coppie che soddisfano questa proprietà

se si può scrivere così si può pensare che l'ingresso sia WN



La coppia $(G(z), \sigma^2)$ è detta Fattore Spettrale

Dati $G(z)$ e σ^2, in che modo posso ottenere $\tilde{G}(z)$, $\tilde{\sigma}^2$ tale che
$$\tilde{G}(z)\tilde{G}(z^{-1})\tilde{\sigma}^2 = G(z)G(z^{-1})\sigma^2 = \Phi_{yy}(z) \ ?$$

le 2 simulazioni in Matlab sono = (hanno lo stesso valore statistico)

Voglio trovare $\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{G}(z)$ tale che $y(\cdot)$ e $\tilde{y}(\cdot)$ abbiano lo stesso spettro

PRIMO MODO: $\tilde{G}(z) := \dfrac{G(z)}{\alpha}$ $\quad \tilde{\sigma}^2 = \alpha^2\sigma^2$ $\rightarrow$ stessa cosa fatta con MA(n)

$$\Phi_{\tilde{y}\tilde{y}}(z) = \tilde{\sigma}^2 \tilde{G}(z)\tilde{G}(z^{-1}) = \alpha^2\sigma^2 \cdot \frac{G(z)}{\cancel{\alpha}} \cdot \frac{G(z^{-1})}{\cancel{\alpha}} = \Phi_{yy}(z)$$

SECONDO MODO: $\tilde{G}(z) := z^{-k} G(z)$, $\quad \tilde{\sigma}^2 := \sigma^2$ $\rightarrow$ Una traslazione di k passi su un Proc. stazionario NON cambia nulla

ho solo introdotto un ritardo

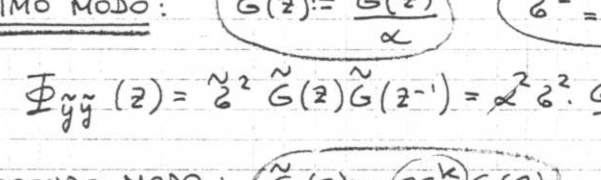
$$\Phi_{\tilde{y}\tilde{y}}(z) = \tilde{\sigma}^2 \tilde{G}(z)\tilde{G}(z^{-1}) = \sigma^2 \cdot \cancel{z^{-k}} G(z) \cancel{z^{k}} G(z^{-1}) = \Phi_{yy}(z)$$

(una traslazione temporale non può alterare le caratteristiche probabilistiche di un PC stazionario)

TERZO MODO: $\tilde{G}(z) = G(z)T(z)$, $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2$, dove $\boxed{T(z) := \dfrac{1}{\alpha} \dfrac{z+\alpha}{z+\frac{1}{\alpha}}}$ $\rightarrow$ polo = reciproco dello zero

Proprietà: $T(z)T(z^{-1}) = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{z+\alpha}{z+1/\alpha} \cdot \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{z^{-1}+\alpha}{z^{-1}+1/\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{z+\alpha}{z+1/\alpha} \cdot \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{1+\alpha z}{1+z/\alpha} =$

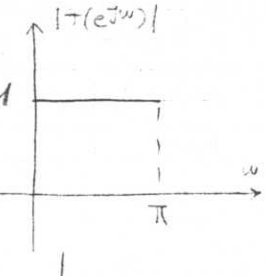
$$= \frac{1}{\cancel{\alpha^2}} \cdot \frac{\cancel{z+\alpha}}{\cancel{z+1/\alpha}} \cdot \frac{\alpha \cdot (\cancel{1/\alpha + z})}{\frac{1}{\cancel{\alpha}} \cdot (\cancel{\alpha + z})} = 1$$

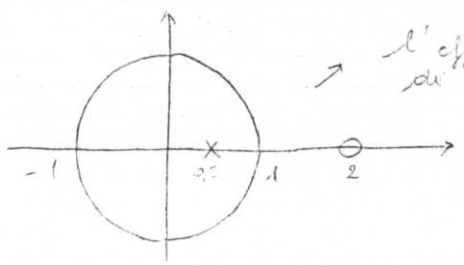


$$\Phi_{\tilde{y}\tilde{y}}(z) = \sigma^2 \tilde{G}(z)\tilde{G}(z^{-1}) = \sigma^2 \cdot G(z)G(z^{-1}) \cdot \underbrace{T(z) \cdot T(z^{-1})}_{=1} = \Phi_{yy}(z)$$

Le sinusoidi NON vengono attenuate

INGR = sin. OUT = sin. con la stessa freq.





l'effetto di x e o è quello di compensarsi a vicenda $\Rightarrow$ sulla circonferenza si vede sempre la stessa cosa

FILTRO PASSA-TUTTO (ALL-PASS FILTER)

Esempio: $G(z) = 1 + 0{,}5\,z^{-1} = \dfrac{z+0{,}5}{z}$ $\qquad T(z) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{z+2}{z+0{,}5}$ $\qquad \sigma^2 = 1$

(x)

$\tilde{G}(z) = G(z)T(z) = 0{,}5\,\dfrac{(z+2)}{z}$

simmetrie dovute al prodotto $G(z)G(z^{-1})$ (i coeff di z e z^{-1} DEVONO essere = !!)

$\Phi_{yy}(z) = (1+0{,}5\,z^{-1})(1+0{,}5\,z) = 1{,}25 + 0{,}5(z+z^{-1})$

$\Phi_{\hat{y}\hat{y}}(z) = (0{,}5)^2(z+2)(z^{-1}+2) = \Phi_{yy}(z)$

REGOLA: Se ad uno zero sostituisco il suo reciproco, lo spettro cambia solo per una costante (x)

Teorema (fattorizzazione Spettrale)

Dato un P.C. stazionario a spettro razionale ergodico Y (senza poli con modulo = 1)

∃ un'unica fattorizzazione $(\hat{G}(z), \hat{\sigma}^2)$ tale che:

- $N_{\hat{G}}(z)$ e $D_{\hat{G}}(z)$ sono coprimi; monici e di ugual grado

NON ci sono poli e zeri coincidenti ← NON hanno radici in comune

coeff della potenza di grado MAX è = 1

- $N_{\hat{G}}(z)$ ha zeri con modulo ≤ 1
- $D_{\hat{G}}(z)$ ha poli con modulo < 1

Se il fattore spettrale che calcoliamo NON è canonico bisogna ricavarlo.

Tale fattore spettrale è detto CANONICO

Esempio: $G(z) = \dfrac{10(z+2)}{(z+0{,}3)(z+0{,}1)}$ $\qquad \sigma^2 = 1$ $\quad$ Trovare il fattore spettrale canonico $(\hat{G}(z), \hat{\sigma}^2)$

Controllo che non sia già canonico:
NO perché:

1) $N_G(z)$ non è monico → $D_G(z)$ sì $\qquad$ Sono coprimi perché non ci sono semplificazioni
2) $gr(N_G) \neq gr(D_G)$
3) zero $= -2$ (ext al cerchio di raggio 1)

Ricaviamo $(\hat{G}(z), \hat{\sigma}^2)$

Tanto lo spettro NON risente di ritardi e anticipi

- Per avere lo stesso grado moltiplico per z ⇒ $G(z) = \dfrac{10\,z(z+2)}{(z+0{,}3)(z+0{,}1)}$, $\sigma^2 = 1$
- Moltiplico per $T(z) = 2\,\dfrac{z+1/2}{z+2}$ → per verificare se è giusto $\underline{\underline{T(1)}} = 2 \cdot \dfrac{3/2}{3} = \underline{\underline{1}}$ ok

$G(z) = \dfrac{20\,z\cdot(z+0{,}5)}{(z+0{,}3)(z+0{,}1)}$

- Per rendere monico il numeratore divido per 20 $G(z)$ e moltiplico per 400 σ^2

$\hat{G}(z) = \dfrac{z(z+0{,}5)}{(z+0{,}3)(z+0{,}1)}$, $\quad \hat{\sigma}^2 = 400$

PREDIZIONE OTTIMA AD UN PASSO

Ipotesi: $y(\cdot)$ PC stazionario a spettro razionale senza poli e zeri con modulo = 1

per la stabilità

(Se abbiamo degli zeri con modulo = 1 ∄ predittore ottimo ⇒ bisognerebbe spostare un po' lo zero solo che così lavoriamo con un altro proc con spettro molto simile.)

6

Scrivo $\hat{G}(z)$ come $\hat{G}(z) = \dfrac{C(z)}{A(z)} = \dfrac{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots}$ (nel caso più generale $\hat{G}(z)$ è la fdt di un ARMA)

essendo monico con NUM e DEN di = grado se divido per $z^{n_{\max}}$ ottengo 1

$$Y(z) = G(z)W(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{C(z)}{A(z)} W(z) \Rightarrow A(z)Y(z) = C(z)W(z) \Rightarrow \text{aggiungo } C(z)Y(z)$$

$$\Rightarrow C(z)Y(z) = [C(z) - A(z)]Y(z) + C(z)W(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \boxed{\frac{C(z) - A(z)}{C(z)}} \cdot Y(z) + W(z) \qquad (*)$$

il trucco è togliere 1

$$\frac{\cancel{1-1} + (c_1 + a_1)z^{-1} + (c_2 + a_2)z^{-2} \dots}{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} \dots} \overset{\text{lunga divisione}}{=} \underbrace{(c_1 + a_1)}_{\alpha_1} z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \alpha_3 z^{-3} + \dots$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C(z) - A(z)}{C(z)} \cdot Y(z)\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[(\alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots)Y(z)\right] = \alpha_1 y(t-1) + \alpha_2 y(t-2) \dots$$

$\Downarrow$ $Y(t)$ dipende solo dalle y vecchie

Antitrasformo $(*)$:

$$y(t) = \alpha_1 y(t-1) + \alpha_2 y(t-2) + \dots + w(t)$$

$w(t)$ → Termine impredicibile ⇓ nel miglior predittore NON lo considero.

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{y}(t|t-1) &= \alpha_1 y(t-1) + \alpha_2 y(t-2) + \dots \alpha_k y(t-k) \\ \hat{Y}(z) &= \frac{C(z) - A(z)}{C(z)} \cdot Y(z) \end{aligned}}$$

Predittore ottimo ad 1 passo (Formula del predittore nel dominio delle frequenze)

$$y \longrightarrow \boxed{\frac{C(z) - A(z)}{C(z)}} \longrightarrow \hat{y}$$

Si dimostra che le radici di $C(z)$ sono interne alla circonferenza ⇒ è stabile

$C(z)$ NON può avere zeri $= 1$ perché qui diventano poli ⇒ sarebbero instabili

Formula del predittore nel dominio del tempo

$$C(z)\hat{Y}(z) = (C(z) - A(z))Y(z)$$

$$(1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots)\hat{Y}(z) = \left[(c_1 + a_1)z^{-1} + (c_2 + a_2)z^{-2} + \dots\right]Y(z)$$

$$\hat{y}(t|t-1) + c_1 \hat{y}(t-1|t-2) + c_2 \hat{y}(t-2|t-3) \dots = (c_1 + a_1)y(t-1) + (c_2 + a_2)y(t-2) + \dots$$

↳ verificare che non compaia MAI $y(t)$

$$\boxed{\hat{y}(t|t-1) = -\sum_{i=1}^{M_c} c_i \hat{y}(t-i|t-i-1) + \sum_{i=1}^{\max(m_a, m_c)} (a_i + c_i)\, y(t-i)}$$

$$\mathrm{Var}\left[\hat{y}(t|t-1) - y(t)\right] = \mathrm{Var}[w(t)] = \hat{\sigma}^2$$

→ Se un es chiede la varianza verifico che sia canonico e l'ho già

Varianza dell'errore di predizione

perché è l'unico termine che ho trascurato passando da y a $\hat{y}$

ESERCIZIO: $y(t) = -0{,}5\, y(t-1) + w(t) + 0{,}9\, w(t-1) \qquad w(\cdot) \sim WN(0, 6^2)$

$\hat{y}(t|t-1) = ?$ ↳ ARMA(1,1)

Bel risultato perché se riusciamo ad ottenere un modello possiamo fare previsioni

$$G(z) = \frac{1 + 0{,}9 z^{-1}}{1 + 0{,}5 z^{-1}} = \frac{C(z)}{A(z)}$$

è un fattore spettrale canonico?

$\downarrow = \hat{G}(z)$

Sì perché poli e zeri hanno $|\cdot| < 1$ sono monici, di = grado e non semplificabili.

$$\hat{Y}(z) = \frac{C(z) - A(z)}{C(z)} Y(z) = \frac{0{,}4 z^{-1}}{1 + 0{,}9 z^{-1}} Y(z)$$

In Matlab `yhat = filter([0,4],[1 0,9], y)`

$$(1+0{,}9z^{-1})\hat{Y}(z) = 0{,}4\, z^{-1} Y(z)$$

$$\hat{y}(t|t-1) + 0{,}9\, \hat{y}(t-1|t-2) = 0{,}4\, y(t-1)$$

$$\hat{y}(t|t-1) = -0{,}9\, \hat{y}(t-1|t-2) + 0{,}4\, y(t-1)$$

La varianza dell'errore di predizione in questo caso è σ^2