PROCESSI CASUALI STAZIONARI

Contenuti:

- Nozione di P.C. stazionario
- Medie del I e del II ordine
- Rumore bianco
- Spettro
- Fattorizzazione spettrale canonica
- Conclusioni

Motivazione: Nell'identificazione di modelli dinamici bisogna tener conto della presenza di segnali (disturbi) che non siamo in grado di descrivere deterministicamente.

NOZIONE DI P.C. STAZIONARIO

Processo Casuale (P.C.) y(t): un esperimento casuale il cui esito è una funzione del tempo *y(t)*

Esempio 1: Lancio di una moneta. Se esce "testa" $y(t) = sin(2\pi t/T)$, T intero. Se esce croce $y(t) = -sin(t2\pi t/T)$.

Esempio 2: $y(t+1) = x(t) + w(t)$, dove $w(t)$ è una V.C. indip. da $w(t+i)$, $i \neq 0$, con $P(w(t) = 1) = 0.5$, $P(w(t) = -1) = 0.5$. Il P.C. $y(t)$ è l'andamento dei beni di un giocatore che gioca sempre la stessa posta a testa o croce.

Esempio 3: Una qualsiasi serie di dati rilevata da un esperimento (temperatura in un motore, vibrazioni in un veicolo, etc.) E' sicuramente (almeno in parte) casuale perché ci sono gli errori di misura.

Nota: D'ora in poi verranno considerati P.C. a tempo discreto (l'indice temporale t è un numero intero).

Osservazioni:

- Il risultato di un esperimento casuale che produce un P.C. è una funzione del tempo $y(t)$ che prende il nome di *realizzazione*.

- Posso pensare al P.C. come ad un vettore di V.C. di lunghezza infinita.

- Se fisso un istante di tempo $\bar{t}$, allora $y(\bar{t})$ è una V.C.

P.C. stazionario $X(t)$: Se per un qualsiasi n, scelti comunque n istanti $t_1, t_2, \ldots, t_n$, il vettore di V.C. $[y(t_1)\ y(t_2)\ \ldots\ y(t_n)]^T$ ha la stessa d.d.p. di $[y(t_1+\tau)\ y(t_2+\tau)\ \ldots\ y(t_n+\tau)]^T$ per ogni possibile valore intero di τ.

Interpretazione: Le caratteristiche probabilistiche del processo sono invarianti rispetto a traslazioni temporali.

Esempio 1: Per $t = kN$, $y(t) = 0 \Rightarrow$ non c'è incertezza. Poiché negli altri istanti c'è incertezza, il processo non è stazionario.

Esempio 2: $w(t)$ è una P.C. stazionario. Si può invece mostrare che $y(t)$ non lo è (la varianza di $y(t)$ cresce al crescere di t).

D'ora in poi verranno considerati solo P.C. stazionari.

MEDIE DEL I E DEL II ORDINE

Media: In generale $m_y(t) = E[y(t)]$ è una funzione di t. Se però $y(t)$ è un P.C. è stazionario, risulta $m_y(t) = m_y$, $\forall t$ (se $E[y(t)]$ dipendesse da t verrebbe violata l'invarianza rispetto alle traslazioni temporali).

Per un P.C. stazionario è facile stimare m_y: basta calcolare la media campionaria di $y(t)$. Se considero $\tilde{y}(t) = y(t) - m_y$, vedo subito che $E[\tilde{y}(t)] = 0$. Con questo pretrattamento, ci si può sempre ricondurre a P.C. a media nulla (*nota:* $y(t)$ e $\tilde{y}(t)$ hanno la stessa autocovarianza)

Funzione di autocovarianza: $\gamma_{yy}(t_1,t_2) = Cov[y(t_1),y(t_2)]$. Se $y(t)$ è un P.C. stazionario, $\gamma_{yy}(t_1,t_2) = \gamma_{yy}(t_2-t_1),\ \forall t_1, t_2$.

Nota: $\gamma_{yy}(0) = Var[y(t)]$

Proprietà: $|\gamma_{yy}(\tau)| \leq \gamma_{yy}(0),\ \forall \tau$.

Funzione di autocovarianza normalizzata (per P.C. staz.):

$$\rho_{yy}(\tau) = \frac{\gamma_{yy}(\tau)}{\gamma_{yy}(0)}$$

(Ovviamente, $0 \leq |\rho_{yy}(\tau)| \leq 1$)

P.C. stazionario in senso debole: $y(t)$ è detto stazionario in senso debole quando $m_y(t) = m_y$, $\forall t$, $\gamma_{yy}(t_1,t_2) = \gamma_{yy}(t_2-t_1)$, $\forall t_1, t_2$.

Nota: Stazionarietà $\Rightarrow$ stazionarietà in senso debole
Stazionarietà in senso debole $\nRightarrow$ stazionarietà

Processo casuale gaussiano: $y(t)$ è un P.C. gaussiano se per un qualsiasi n, scelti comunque n istanti $t_1, t_2, \ldots, t_n$, il vettore di V.C. $[y(t_1)\ y(t_2)\ \ldots\ y(t_n)]^T$ è distribuito gaussianamente.

Proprietà: Un P.C. gaussiano è completamente caratterizzato (in senso probabilistico) dalla conoscenza di $m_y(t)$ e $\gamma_{yy}(t_1,t_2)$.

Proprietà: Un P.C. gaussiano è stazionario se e solo se è stazionario in senso debole.

RUMORE BIANCO

Rumore bianco in senso stretto: $y(t)$ è un rumore bianco (*white noise*) se per un qualsiasi n, scelti comunque n istanti $t_1, t_2, \ldots, t_n$, le V.C. $y(t_1), y(t_2), \ldots, y(t_n)$ sono mutuamente indipendenti.

Interpretazione: E' come se $y(t)$ fosse il risultato di un esperimento casuale, il cui esito è del tutto indipendente dai valori precedenti e futuri del P.C.

Esempio: La sequenza dei numeri usciti alla roulette.

Un rumore bianco è un P.C. completamente imprevedibile. Conoscere i valori passati non mi dà nessuno spunto per prevedere quelli futuri. Migliore stima: $\hat{y}(t) = m_y$.

Rumore bianco (in senso lato): $y(t)$ è un rumore bianco in senso lato se $\gamma_{yy}(\tau) = 0,\ \tau \neq 0$ (mi accontento che $y(t_1)$ e $y(t_2)$ siano incorrelate $\forall t_1, t_2$).

Per P.C. gaussiani le nozioni di rumore bianco in senso stretto e senso lato sono equivalenti.

Notazione: $y(t) \sim WN(m_y,\sigma_y^2)$ *(White Noise)*

$y(t) \sim WGN(m_y,\sigma_y^2)$ *(White Gaussian Noise)*

Funzione di autocovarianza del rumore bianco:

$$\gamma_{yy}(\tau) = \begin{cases} 1 \ , \ \tau = 0 \\ 0 \ , \ \tau \neq 0 \end{cases}$$

SPETTRO

Definizione: Lo *spettro* (o "densità spettrale di potenza") di un P.C. stazionario $y(t)$ è la trasformata di Fourier della funzione di autocovarianza

$$\Gamma_{yy}(\omega) = \mathcal{F}[\gamma_{yy}(\tau)] = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma_{yy}(\tau)\, exp(-j\omega\tau)$$

Esempio 1: $w(t) \sim WN(0,\sigma^2)$.

$$\Gamma_{ww}(\omega) = \mathcal{F}[\gamma_{ww}(\tau)] = \sigma^2$$

Spettro costante a tutte le frequenze: "luce bianca".

Esempio 2: $y(t) = w(t) + 0.5w(t-1)$, $w(t) \sim WN(0,\sigma^2)$.
Facendo i conti, risulta $\Gamma_{ww}(\omega) = [1.25+cos(\omega)]\sigma^2$

Proprietà dello spettro:

- $\Gamma_{yy}(\omega)$ è reale
- $\Gamma_{yy}(\omega) \geq 0, \ \forall \omega$
- $\Gamma_{yy}(-\omega) = \Gamma_{yy}(\omega)$ (funzione pari)
- $\Gamma_{yy}(\omega+2\pi) = \Gamma_{yy}(\omega)$ (2π-periodica)
- Dato che è pari e periodico basta conoscerlo per $\omega \in [0,\pi]$)
- $\Gamma_{yy}(\omega) = \Phi_{yy}(e^{j\omega})$, dove $\Phi_{yy}(z) = \mathcal{Z}[\gamma_{yy}(\tau)]$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_{yy}(\omega)d\omega = 2\pi \, Var[y(t)]$

Interpretazione: La quantità

$$\int_{-\omega_1}^{\omega_2} \Gamma_{yy}(\omega)d\omega$$

è proporzionale all'energia del processo concentrata nella banda di frequenze $[\omega_1,\omega_2]$.

Stima dello spettro (ipotesi: $E[y(t)] = 0$)

Idea base: Stimo $\gamma_{yy}(\tau)$ mediante l'autocovarianza campionaria e poi ne calcolo la trasformata di Fourier

$$\Downarrow$$

$$\text{"Periodogramma"} = \frac{1}{N}\,|FFT[y(t)]|^2$$

($FFT[y(t)]$: Fast Fourier Transform di $y(t)$, $t = 1,\ldots,N$)

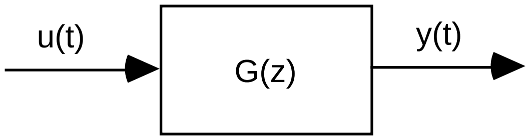
Proprietà del periodogramma:

- E' uno stimatore asintoticamente ($N \to \infty$) non polarizzato dello spettro
- *Non è uno stimatore consistente*. La varianza dell'errore di stima non decresce al crescere di N (cerca di stimare N punti dello spettro avendo N dati $\Rightarrow$ non riesce a convergere)

Metodo di Bartlett: Divido i dati in M spezzoni di lunghezza uguale, calcolo il periodogramma di ciascun spezzone ed infine uso come stimatore la media dei periodogrammi (perdo risoluzione ma diminuisce la varianza).

FATTORIZZAZIONE SPETTRALE CANONICA

Spettro dell'uscita di un sistema lineare

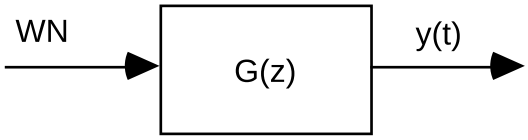


Teorema: Se $u(t)$ è un P.C. stazionario e $G(z)$ (rapporto di polinomi in z) è stabile, allora $y(t)$ converge ad un P.C. stazionario tale che:

- $E[y(t)] = G(1)E[u(t)]$
- $\Phi_{yy}(z) = G(z)G(z^{-1})\Phi_{uu}(z)$
- $\Gamma_{yy}(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2\, \Gamma_{uu}(\omega)$

Interpretazione: Filtrando un P.C. $u(t)$ mediante la f.d.t. $G(z)$ cambio la ripartizione dell'energia nelle varie bande di frequenza. Per esempio, se $G(z)$ è un passa alto (ideale), $y(t)$ non contiene più le componenti ad alta frequenza eventualmente presenti in $u(t)$.

Idea interessante: Dato un P.C. $y(t)$ con spettro $\Gamma_{yy}(\omega)$, se riesco a trovare $G(z)$ tale che $\Phi_{yy}(z) = \sigma^2 G(z)G(z^{-1})$ ($\Rightarrow \Gamma_{yy}(\omega) = \sigma^2|G(e^{j\omega})|^2$) posso immaginare $y(t)$ come l'uscita di $G(z)$ alimentata da $WN(0,\sigma^2)$.



G(z): "shaping filter"

Definizione: Quando $\Phi_{yy}(z) = \sigma^2 G(z)G(z^{-1})$, dove $G(z)$ è un rapporto di polinomi in z si dice che $y(t)$ è "a spettro razionale" e che $G(z)$ è un fattore spettrale.

Nota: Per simulare $y(t)$ basta simulare un *WN* (facile) e usarlo come ingresso di un filtro con f.d.t. $G(z)$.

Fattorizzazione spettrale canonica

Dato un P.C. stazionario $y(t)$ a spettro razionale, esistono sempre infiniti fattori spettrali $\Rightarrow$ problemi di non unicità. Per la predizione e l'identificazione ne serve uno particolare.

Teorema: Dato un P.C. stazionario $y(t)$ a spettro razionale, esiste un unico fattore spettrale $(\hat{G}(z), \hat{\sigma}^2)$ (detto "canonico") tale che:

- il numeratore e il denominatore di $\hat{G}(z)$ hanno ugual grado;
- il numeratore e il denominatore di $\hat{G}(z)$ sono monici (il coeff. della potenza di grado massimo è $= 1$);
- le radici del denominatore di $\hat{G}(z)$ hanno tutte modulo < 1;
- le radici del numeratore di $\hat{G}(z)$ hanno tutte modulo ≤ 1.

Esempio:

$$\Phi_{yy}(z) = \sigma^2 G(z)G(z^{-1})$$

$$G(z) = \frac{10(z+2)}{(z+0.3)\,(z+0.1)}\,, \quad \sigma^2 = 1$$

Il fattore $(G(z),\sigma^2)$ non è canonico perché

- numeratore e denominatore non sono monici;
- numeratore e denominatore non hanno ugual grado;
- il numeratore ha uno zero in $z = -2$.

Il fattore spettrale canonico è

$$\hat{G}(z) = \frac{z(z+0.5)}{(z+0.3)\,(z+0.1)}\,, \quad \hat{\sigma}^2 = 400$$

(è facile verificare che $\Phi_{yy}(z) = \hat{\sigma}^2\hat{G}(z)\hat{G}(z^{-1})$).

CONCLUSIONI

- P.C. stazionari: caratterizzati da media e autocovarianza.

- In alternativa all'autocovarianza posso considerare lo spettro.

- Idea forte: sotto larghe ipotesi un P.C. stazionario può essere visto come l'uscita di G(z) stabile alimentata da un rumore bianco

$$\Downarrow$$

posso usare G(z) (fattore spettrale) per caratterizzare il P.C.

TEST DI BIANCHEZZA

Contenuti:

- Motivazione
- Test sui cambi di segno
- Test Portmanteau
- Conclusioni

MOTIVAZIONE

Fatto: Dato un P.C. stazionario $y(t)$, la sequenza degli errori di predizione commessi dal predittore ottimo ad un passo $\hat{y}(t+1|t)$ è un rumore bianco.

Idea: Per validare un modello identificato controllo la sequenza degli errori di predizione: se non è un *WN* potrei aver sbagliato l'ordine o addirittura il modello.

Problema: Come faccio a capire se un P.C. è un rumore bianco?

$$\Downarrow$$

Test di bianchezza

TEST SUI CAMBI DI SEGNO

Ipotesi:

- $w(t) \sim WN$
- $P(w(t) < 0) = P(w(t) > 0) = 0.5$

Nota: Non faccio ipotesi sulla d.d.p. di *w(t)*.

$$x_N = \sum_{i=1}^{N-1} s_i$$

$$s_i = \begin{cases} 1 \text{ se } w(i)w(i+1) \leq 0 \\ 0 \text{ se } w(i)w(i+1) > 0 \end{cases}$$

x_N = n° di cambi di segno nella sequenza *w(1), w(2), …, w(N)*

In media, mi aspetto che *w(t)* cambi di segno una volta su due (se cambiasse di segno ad ogni passo o, all'opposto, non cambiasse mai, *w(t)* non sarebbe più indip. da *w(t-1)*).

Problema: come capire se *w(t)* cambia di segno troppe o troppo poche volte?

Teorema: Per $N \to \infty$, la V.C. x_N è distribuita gaussianamente con $E[x_N] = N/2$, $Var[x_N] = N/4$.

Conseguenza: La V.C.

$$\frac{x_N - \frac{N}{2}}{\frac{\sqrt{N}}{2}}$$

ha la stessa d.d.p. della V.C. gaussiana standard Z (tale che $E[Z] = 0$, $Var[Z] = 1$).

Test dei cambi di segno: Fissato il livello di significatività α (tipicamente $\alpha = 0.05$) cerco sulla tabella della V.C. gaussiana standard Z un valore z_α tale che $P(|Z| \leq z_\alpha) = 0.95$. Poi adotto la regola:

- $\left| \frac{x_N - \frac{N}{2}}{\frac{\sqrt{N}}{2}} \right| \leq z_\alpha \Rightarrow w(t)$ è "bianco"

- $\left| \frac{x_N - \frac{N}{2}}{\frac{\sqrt{N}}{2}} \right| > z_\alpha \Rightarrow w(t)$ non è "bianco"

Esempio: Se $\alpha = 0.05$, risulta $z_\alpha = 1.96$. Allora la sequenza $w(t)$ passa il test di bianchezza con livello di significatività del *5%* se

$$\left| \frac{x_N - \frac{N}{2}}{\frac{\sqrt{N}}{2}} \right| \leq 1.96$$

Osservazioni:

- Con $\alpha = 0.05$, anche se $w(t)$ è un *WN*, nel *5%* dei casi non passa il test di bianchezza.

- Viceversa, se $w(t)$ non è un *WN* può ciononostante passare il test (basta prendere un segnale periodico che cambia di segno *N/2* volte).

TEST "PORTMANTEAU"

Ipotesi:

- $w(t) \sim WN$
- $E[w(t)] = 0$

Idea: Considero $\hat{r}(\tau) = \dfrac{\hat{R}(\tau)}{\hat{R}(0)}$, dove

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} w(t+\tau)w(t)$$

Sotto le ipotesi fatte $\hat{r}(\tau)$ è uno stimatore di $\rho(\tau)$. Poiché per un WN, $\rho(\tau) = 0$, $\tau \neq 0$, mi aspetto che $\hat{r}(\tau) \cong 0$, $\tau \neq 0$.

Come dare rigore statistico a questa considerazione qualitativa?

Teorema: Se $w(t)$ è un WN, per $N \to \infty$

- $\sqrt{N}\,\hat{r}(\tau) \to G(0,1)$

  (la f.d.d. di $\sqrt{N}\,\hat{r}(\tau)$ converge ad un gaussiana standard)

- $N \sum_{\tau=1}^{m} \hat{r}(\tau)^2 \to \chi^2(m)$

Test di bianchezza: Fissato il livello di significatività α (tipicamente, $\alpha = 0.05$) cerco sulle tabelle x_α tale che $P(\chi^2(m) < x_\alpha) = 0.95$. Poi adotto la seguente regola:

- $N \sum_{\tau=1}^{m} \hat{r}(\tau)^2 \leq x_\alpha \Rightarrow w(t)$ è "bianco"

- $N \sum_{\tau=1}^{m} \hat{r}(\tau)^2 > x_\alpha \Rightarrow w(t)$ non è "bianco"

(valori tipici di *m:* da *5* fino a *N/4*)

Rappresentazione grafica:

Nota: In base alla prima parte del teorema, se $w(t)$ è un WN risulta $P(\sqrt{N}\ \hat{r}(\tau) \quad < 1.96) = 0.95 \Rightarrow$ mi aspetto che $\hat{r}(\tau)$ esca dalla "banda" una volta ogni 20 campioni (test di Anderson).

CONCLUSIONI

- Un modello sottoparametrizzato non riesce a spiegare bene i dati $\Rightarrow$ i residui (= errori di predizione ad un passo) non sono bianchi

- Aumentando l'ordine del modello i residui diventano bianchi

- Strategia "semplice" per la scelta dell'ordine del modello: usare il modello più semplice che produce dei residui bianchi.

- I test di bianchezza sono "soggettivi" (devo scegliere il livello di significatività α). Come in tutti i test c'è una certa probabilità di respingere l'ipotesi vera e di accettare l'ipotesi sbagliata. Il compromesso tra i due tipi di errore dipende da α.

- Alternativa: analisi spettrale dei residui.