Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati LS 2/2/2004
(II prova in itinere)

1. Si consideri il seguente processo casuale

$$y(t) = 0.3\, y(t-1) + 3w(t-2) + 12w(t-3)\,, \qquad w(\cdot) \sim WGN(0,1)$$

1.a Ricavare il fattore spettrale canonico.

$$\mathbf{G(z) = \frac{3z^{-2} + 12z^{-3}}{1 - 0.3z^{-1}} = 3\,\frac{z + 4}{z^3 - 0.3z^2}\,,\ \text{non canonico}}$$

$$\mathbf{T(z) = 4\,\frac{z + 1/4}{z + 4}\,,\ z^2G(z)T(z) = 12\,\frac{z + 1/4}{z - 0.3}\,,\ \text{non canonico}}$$

$$\mathbf{\hat{G}(z) = \frac{z + 1/4}{z - 0.3} = \frac{1 + 0.25z^{-1}}{1 - 0.3z^{-1}}\,,\ \hat{\sigma}^2 = 144}$$

$$\mathbf{C(z) = 1 + 0.25\, z^{-1},\ A(z) = 1 - 0.3\, z^{-1},}$$

1.b Ricavare il predittore ottimo ad un passo per il seguente modello ARMAX

$$y(t) = 0.3\, y(t-1) + u(t-2) + 3w(t-2) + 12w(t-3)\,, \qquad w(\cdot) \sim WGN(0,1)$$

Devo usare il fattore spettrale canonico ricavato al punto precedente:

$$\mathbf{C(z)\hat{Y}(z) = [C(z) - A(z)]Y(z) + z^{-k}B(z)U(z)}$$

Nel nostro caso B(z) = 1, k = 2.

$$\mathbf{(1 + 0.25\, z^{-1})\, \hat{Y}(z) = 0.55\, z^{-1}\, Y(z) + z^{-2}U(z)}$$

$$\mathbf{\hat{y}(t|t-1) = -\,0.25\hat{y}(t-1|t-2) + 0.55y(t-1) + u(t-2)}$$

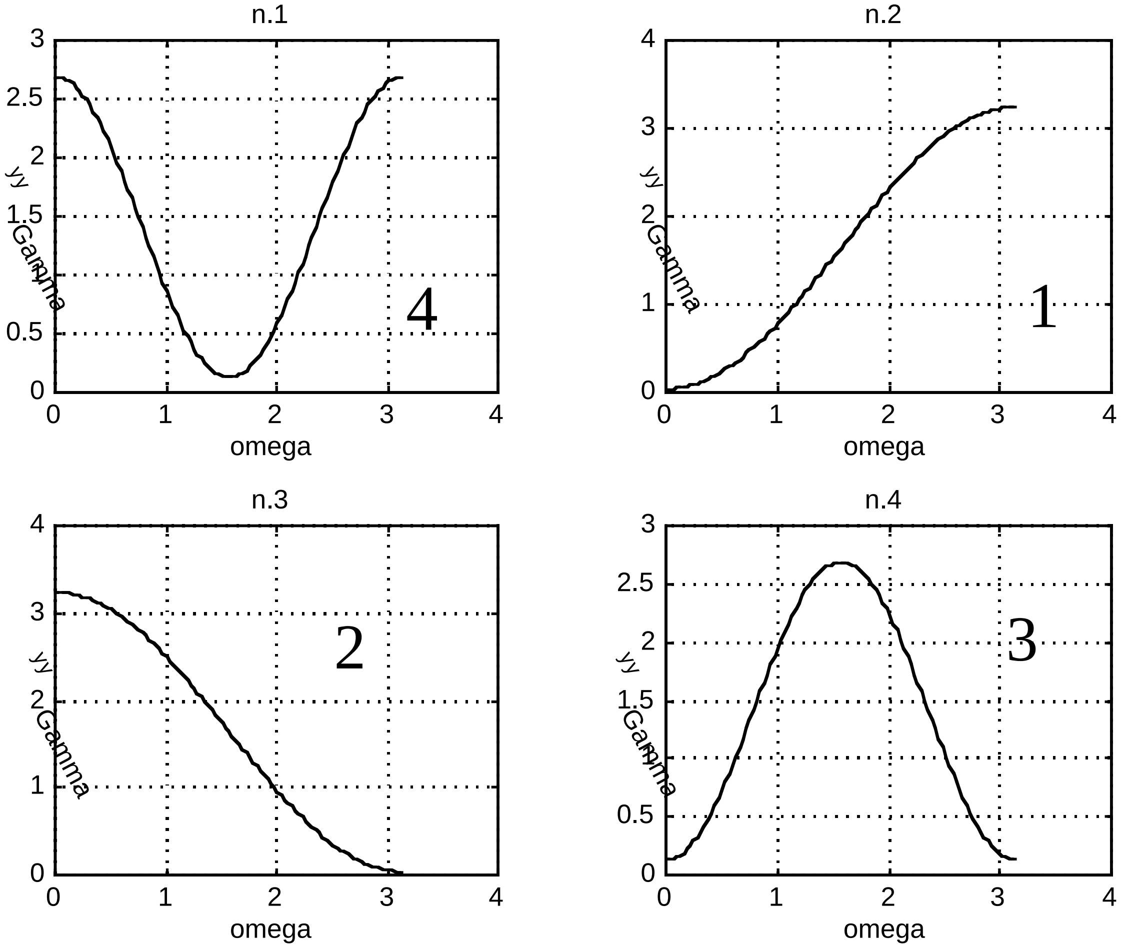
1.c Determinare la varianza dell'errore di predizione ad un passo.

$$\mathbf{Var[\varepsilon(t)] = \hat{\sigma}^2 = 144}$$

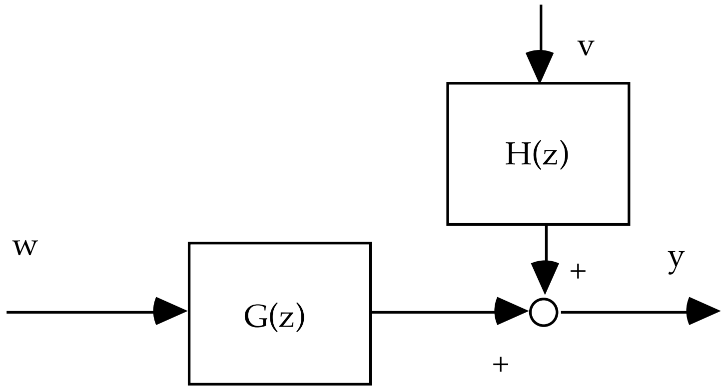
2. Si scriva sopra il grafico delle densità spettrali di potenza il numero del corrispondente fattore spettrale (in tutti e quattro i casi $\sigma^2 = 1$)

1. $G(z) = 1-0.8z^{-1}$ **2.** $G(z) = 1+0.8z^{-1}$

3. $G(z) = (1+0.8z^{-1})(1-0.8z^{-1})$ **4.** $G(z) = 1+0.64z^{-2}$



3. Si consideri il seguente schema a blocchi in cui i rumori bianchi $w \sim WN(m_w, \sigma_w^2)$, $v \sim WN(m_v, \sigma_v^2)$ sono tra loro indipendenti:



$G(z) = 1 - z^{-1}$, $\qquad H(z) = \dfrac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$

Sapendo che $E[y(t)] = 1$, $\gamma_{yy}(0) = 8/3$, $\gamma_{yy}(1) = 0$, ricavare i valori di m_v, σ_v^2, σ_w^2.

$E[y(t)] = H(1)m_v + G(1)m_w = 2\, m_v$

Pertanto,

$E[y(t)] = 2\, m_v = 1 \Rightarrow m_v = 0.5$

Inoltre, definendo $X(z) = H(z)V(z)$, $S(z) = G(z)W(z)$, dato che $x(t)$ e $s(t)$ sono incorrelati,

$\gamma_{yy}(\tau) = \gamma_{xx}(\tau) + \gamma_{ss}(\tau)$

Osservando che $x(t)$ è un AR(1) (con $a = 0.5$) e $s(t)$ è un MA(1) (con $c_0 = 1$, $c_1 = -1$):

$$\gamma_{xx}(\tau) = \frac{a^\tau \sigma_v^2}{1 - a^2} = \frac{0.5^\tau \sigma_v^2}{1 - 0.25}, \quad \gamma_{xx}(0) = \frac{4}{3}\sigma_v^2, \quad \gamma_{xx}(1) = \frac{2}{3}\sigma_v^2$$

$$\gamma_{ss}(0) = (c_0^2 + c_1^2)\,\sigma_w^2 = 2\,\sigma_w^2, \quad \gamma_{ss}(1) = c_0\, c_1\, \sigma_w^2 = -\sigma_w^2$$

Si scrive il seguente sistema di due equazioni nelle due incognite σ_v^2, σ_w^2:

$$\gamma_{yy}(0) = \frac{4}{3}\sigma_v^2 + 2\,\sigma_w^2 = 8/3$$

$$\gamma_{yy}(1) = \frac{2}{3}\sigma_v^2 - \sigma_w^2 = 0$$

La soluzione è $\sigma_v^2 = 1$, $\sigma_w^2 = 2/3$.

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

		V	*F*
1.	In una rete neurale MLP il numero dei parametri da stimare coincide con il numero dei neuroni.	❑	■
2.	Una rete neurale RBF in cui vengono usati come parametri anche i centri dei neuroni è un modello non lineare nei parametri.	■	❑
3.	Sia v(t) = x(t) - y(t), dove x(t) e y(t) sono processi casuali stazionari con $\Gamma_{xx}(\omega) = \Gamma_{xy}(\omega) = \Gamma_{yy}(\omega)$. Allora, $\Gamma_{vv}(\omega) = 2\Gamma_{xx}(\omega)$.	❑	■
4.	Sia y(t) un processo stazionario AR(1) con un polo maggiore di zero. Allora, il massimo di $\Gamma_{yy}(\omega)$ si ottiene per $\omega = 0$.	■	❑
5.	Il periodogramma è uno stimatore: 1) asintoticamente non polarizzato; 2) non consistente.	■	❑
6.	Due processi casuali a spettro razionale hanno la stessa densità spettrale di potenza se e solo se hanno lo stesso fattore spettrale canonico.	■	❑
7.	Il fattore spettrale canonico ha sempre guadagno unitario.	❑	■
8.	Sia y(t) un processo casuale stazionario tale che A(z)Y(z) = C(z)W(z), $w \sim WN(0,\sigma_w^2)$. Allora, la varianza dell'errore di predizione ad un passo è pari a σ_w^2.	❑	■
9.	Sia y(t) un processo MA(1). Allora, risulta sempre $\hat{y}(t \mid t-1) = 0, \forall t$.	❑	■
10.	Si supponga che y(t) sia l'uscita di un modello ARX di cui si vogliono stimare i parametri a_i e b_i. Se si conoscono gli ordini dei polinomi A(z) e B(z) ed il valore k del ritardo, lo stimatore LS è non polarizzato	■	❑