1. Si consideri una V.C. X con ddp $f_{X|\theta} = \theta \exp(-\theta x)$, $x \geq 0$, $f_{X|\theta} = 0$, $x < 0$, dove θ è una V.C. con ddp uniforme in [0,1]. Ricavare l'espressione dello stimatore $\theta^{MAP}(X)$.

$$\mathbf{f_{\theta|X} = \frac{f_{X|\theta}\, f_\theta}{f_X}}$$

$$\mathbf{\ln f_{\theta|X} = \ln f_{X|\theta} + \ln f_\theta - \ln f_X = \ln \theta - \theta X - \ln f_X}$$

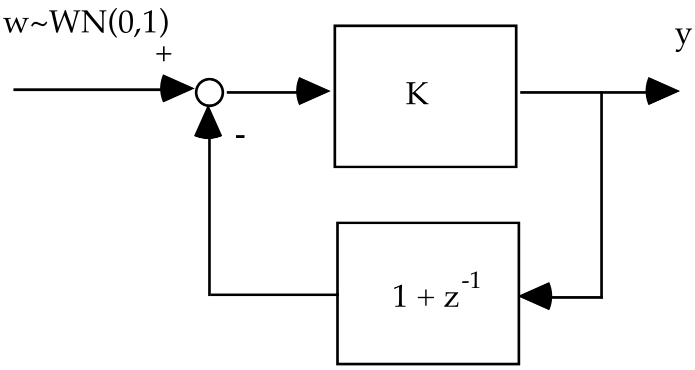
$$\mathbf{\frac{d\ln f_{\theta|X}}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\theta} = X \Rightarrow \theta = \frac{1}{X}}$$

Ricordando che $f_\theta(\theta) = 0$ per $\theta > 1$, si verifica facilmente che:

$$\mathbf{\theta^{MAP} = \frac{1}{X} \quad , \text{se} \quad X \geq 1}$$

$$\mathbf{\theta^{MAP} = 1 \quad , \text{se} \quad X < 1}$$

2. Si consideri il seguente schema a blocchi:



2.a Dire, motivando la risposta, per quali valori positivi di K, l'uscita y(t) converge ad un processo casuale stazionario.

$$\mathbf{Y(z) = G(z)\ W(z),\ W(z) = \frac{K}{1 + K + K z^{-1}} = \frac{\frac{K}{1+K}\, z}{z + \frac{K}{1+K}}}$$

Dato che per K > 0 il polo ha sempre modulo < 1, vanno bene tutti i valori positivi di K

2.b In corrispondenza dei valori di K ricavati al punto precedente, ricavare il fattore spettrale canonico di y(t).

$$\hat{G}(z) = \frac{z}{z + \frac{K}{1+K}}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{K^2}{(1+K)^2}$$

2.c Calcolare la varianza del processo stazionario y(t).

Il processo y(t) è un AR(1):

$$\mathbf{Var[y(t)]} = \frac{\hat{\sigma}^2}{1 - \frac{K^2}{(1+K)^2}}$$

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

		V	*F*
1.	Uno stimatore a massima verosimiglianza è sempre a minima varianza.	❑	■
2.	Si considerino delle V.C. indipendenti $X_i \sim N(m,\sigma^2)$, $i = 1,\dots,N$. Allora, m^{ML} è a minima varianza	■	❑
3.	Se il vettore dei dati Y e il vettore dei parametri θ sono congiuntamente gaussiani, θ^B è funzione lineare del vettore Y.	■	❑
4.	Se $E[X] = E[Y] = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = 1$, allora risulta sempre $E[X \mid Y] = r_{XY} Y$.	❑	■
5.	Nella stima ML di un modello lineare nei parametri, è necessario ipotizzare $\mathrm{rank}(\Phi) = q$, dove q è la dimensione del vettore θ dei parametri incogniti.	■	❑
6.	In una rete neurale RBF il numero dei parametri cresce linearmente in funzione del numero dei neuroni.	■	❑
7.	Sia $v(t) = x(t) - y(t)$, dove $x(t)$ e $y(t)$ sono processi casuali stazionari con $\Gamma_{xx}(\omega) = \Gamma_{yy}(\omega)$. Allora, $\Gamma_{vv}(\omega) \le 2\Gamma_{xx}(\omega)$.	❑	■
8.	Sia $y(t)$ un processo stazionario AR(1) con un polo maggiore di zero. Allora, $\gamma_{yy}(\tau) > 0$, $\forall \tau$.	■	❑
9.	La varianza del periodogramma tende a zero all'aumentare del numero N dei dati.	❑	■
10.	Sia $y(\cdot)$ un P.C. stazionario ottenuto come l'uscita di un AR(1) alimentato da un rumore bianco $w(\cdot)$ con $E[w(t)] = m_w \neq 0$. Allora, se il polo è positivo, risulta sempre $E[y(t)] \ge m_w$.	■	❑