Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati LS 26/11/2004

A1. Si consideri un modello $Y = \Phi(\theta) + V$, $V \sim N(0,\sigma^2 I)$. Ricavare l'espressione del passo di aggiornamento dell'algoritmo iterativo di Gauss-Newton che fornisce θ^{k+1} a partire da θ^k.

B1. Si considerino le V.C. i.i.d. $X_i \sim N(m,\sigma^2)$, $i = 1,\ldots, N$. Ricavare la stima a massima verosimiglianza di m e σ^2 riportando i principali passaggi.

A2. Si supponga che i seguenti dati

$t_1 = -1$ $t_2 = 1$ $t_3 = 2$
$Y_1 = 0.01$ $Y_2 = 10$ $Y_3 = 100$

siano generati dal modello

$Y_k = 10^{(\theta^\circ t_k)}\, V_k$, $k = 1, \ldots, 3$, $(\log_{10} V_k) \sim N(0,\sigma^2)$,

in cui le V.C. V_k sono tra di loro indipendenti.

2.a Ricavare θ^{ML}.

$\tilde{\mathbf{Y}}_k := \log_{10} \mathbf{Y}_k$
$\tilde{\mathbf{V}}_k := \log_{10} \mathbf{V}_k$
$\tilde{\mathbf{Y}} = [\ -2\ \ 1\ \ 2\ ]'$
$\tilde{\mathbf{Y}} = \boldsymbol{\Phi\theta} + \tilde{\mathbf{V}}$
$\boldsymbol{\Phi} = \left[\ t_1\ \ t_2\ \ t_3\ \right]' = [\ -1\ \ 1\ \ 2\ ]'$
$\boldsymbol{\theta}^{ML} = (\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}'\tilde{\mathbf{Y}} = 7/6 = 1.16$

2.b Stimare σ^2.

Stimatore non polarizzato:

$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\Phi\theta}^{ML}$
$\hat{\sigma}^2 = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}/(N-q) = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}/2 = 5/12 = 0.417$

2.c Ricavare gli intervalli di confidenza al 95% per θ^{ML}.

$\hat{\sigma}^2_{\theta^{ML}} = \hat{\sigma}^2 (\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Phi})^{-1} = \hat{\sigma}^2/6 = 5/72 = 0.069$
$I_{0.95} = \left[\ \theta^{ML} - t_0\, \hat{\sigma}_{\theta^{ML}} \quad \theta^{ML} + t_0\, \hat{\sigma}_{\theta^{ML}}\ \right] = [0.031, \quad -2.301]$

(uso $t_0 = 4.303$ perché i gradi di libertà sono $N-q = 3 - 1 = 2$)

Tabella: Valori di $t_{\alpha/2}$ per $\alpha = 0.05$

n	$t_{\alpha/2}$
1	12.706
2	4.303
3	3.182
4	2.776
5	2.571

B2. Si supponga che i seguenti dati

$t_1 = -1$ $t_2 = 1$ $t_3 = 2$
$Y_1 = 100$ $Y_2 = 0.1$ $Y_3 = 0.01$

siano generati dal modello

$Y_k = 10^{(\theta^\circ t_k)} V_k$, $k = 1, \ldots, 3$, $(\log_{10} V_k) \sim N(0,\sigma^2)$,

in cui le V.C. V_k sono tra di loro indipendenti.

2.a Ricavare θ^{ML}.

$\tilde{\mathbf{Y}}_k := \log_{10} \mathbf{Y}_k$
$\tilde{\mathbf{V}}_k := \log_{10} \mathbf{V}_k$
$\tilde{\mathbf{Y}} = [\ 2 \ \ -1 \ \ -2\ ]'$
$\tilde{\mathbf{Y}} = \boldsymbol{\Phi\theta} + \tilde{\mathbf{V}}$
$\boldsymbol{\Phi} = \left[\ t_1 \ \ t_2 \ \ t_3\ \right]' = [\ -1 \ \ 1 \ \ 2\ ]'$
$\boldsymbol{\theta}^{ML} = (\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}'\tilde{\mathbf{Y}} = -7/6 = -1.16$

2.b Stimare σ^2.

Stimatore non polarizzato:

$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\Phi\theta}^{ML}$
$\hat{\sigma}^2 = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}/(N-q) = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}/2 = 5/12 = 0.417$

2.c Ricavare gli intervalli di confidenza al 95% per θ^{ML}.

$\hat{\sigma}^2_{\theta^{ML}} = \hat{\sigma}^2 (\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Phi})^{-1} = \hat{\sigma}^2/6 = 5/72 = 0.069$
$\mathbf{I}_{0.95} = \left[\ \theta^{ML} - t_0\, \hat{\sigma}_{\theta^{ML}} \quad \theta^{ML} + t_0\, \hat{\sigma}_{\theta^{ML}}\ \right] = [-2.301, \quad -0.031]$

(uso $t_0 = 4.303$ perché i gradi di libertà sono N-q = 3 -1 = 2)

Tabella: Valori di $t_{\alpha/2}$ per $\alpha = 0.05$

n	$t_{\alpha/2}$
1	12.706
2	4.303
3	3.182
4	2.776
5	2.571

A3. Si considerino le V.C. i.i.d. $Y_i \sim N(\theta,\sigma^2)$, $i = 1,\ldots, N$, $f_\theta(\theta) = \lambda\exp(-\lambda\theta)$, $\theta \geq 0$, $f_\theta(\theta) = 0$, $\theta < 0$, dove σ^2 e λ sono noti. Ricavare θ^{MAP} riportando i principali passaggi.

Indicando con K una costante che non dipende da θ:

$$\ln f_{\Theta|Y}(\theta | Y) = K - \lambda\theta - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \theta)^2 \ , \ \theta \geq 0$$

Imponendo l'annullamento della derivata rispetto a θ:

$$-\lambda + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \theta) = 0$$

da cui

$$\theta^{MAP} = \frac{-\lambda\sigma^2 + \sum_{i=1}^{N} Y_i}{N}$$

Nel caso in cui l'ultima formula fornisse un valore negativo, un rapido studio di funzione mostra che il punto di massimo si ottiene in corrispondenza della frontiera dei valori ammissibili di θ, e più precisamente in

$$\theta^{MAP} = 0$$

B3. Si considerino le V.C. i.i.d. $Y_i \sim N(\theta,\sigma^2)$, i = 1,…, N, $\theta \sim N(m_\theta,\sigma_\theta^2)$, dove σ^2, m_θ, σ_θ^2 sono noti. Ricavare θ^{MAP} riportando i principali passaggi.

Indicando con K una costante che non dipende da θ:

$$\ln f_{\Theta|Y}(\theta | Y) = K - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \theta)^2 - \frac{(\theta - m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2}$$

Imponendo l'annullamento della derivata rispetto a θ:

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \theta) - \frac{(\theta - m_\theta)}{\sigma_\theta^2} = 0$$

da cui

$$\theta^{MAP} = \left(\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\theta^2}\right)^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{\sigma^2} + \frac{m_\theta}{\sigma_\theta^2}\right)$$

A4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

		V	F
1.	Sia Y il vettore dei dati, θ il vettore dei parametri da stimare e D_θ la regione ammissibile per θ. Se $f_\theta(\theta)$ = costante, $\forall\theta \in D_\theta$, allora $\theta^{ML} = \theta^{B}$.	☐	■
2.	Uno stimatore a massima verosimiglianza è sempre non polarizzato.	☐	■
3.	Si considerino delle V.C. indipendenti $X_i \sim N(m,\sigma_i^2)$, $i = 1,\dots,N$. Allora, $m^{ML} = \sum_{i=1}^{N} X_i/\sigma_i^2$.	☐	■
4.	Se il vettore dei dati Y e il vettore dei parametri θ sono congiuntamente gaussiani, risulta sempre $\theta^{MAP} = \theta^{B}$.	■	☐
5.	$\theta^{MAP} = \theta^{B}$ se e solo se $f_{\theta\mid Y}(\theta \mid Y=y)$ è gaussiana.	☐	■
6.	Se E[X] = E[Y] = 0, allora $E[X \mid Y] = r_{XY}\, Y/\sigma_Y$.	☐	■
7.	Sia $Y = \Phi\theta° + V$, con $V \sim N(0,\sigma^2\Psi)$, σ^2 e Ψ note. Allora, $Var[\theta^{ML}]$ non dipende dal vettore dei dati Y.	■	☐
8.	Nella stima di Bayes di un modello lineare nei parametri, è necessario ipotizzare rank(Φ) = q, dove q è la dimensione del vettore θ dei parametri incogniti.	☐	■
9.	Si consideri un modello $Y = \Phi(\theta°) + V$, con $V \sim N(0,\sigma^2 I)$. Se la matrice di sensitività $d\Phi/d\theta$ non dipende da θ, ∀θ, e $rank(d\Phi/d\theta) = q$, allora l'algoritmo di Gauss-Newton converge in un passo.	■	☐
10.	Sia $Y = \Phi\theta° + V$, con $V \sim N(0,\sigma^2\Psi)$. Sia $\varepsilon = Y - \Phi\theta^{ML}$. Allora, $\varepsilon'\varepsilon/(N-q)$ è una stima non polarizzata di σ^2.	☐	■

B4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

1. Sia Y il vettore dei dati, θ il vettore dei parametri da stimare e D_θ la regione ammissibile per θ. Se $f_\theta(\theta)$ = costante, $\forall\theta \in D_\theta$, allora $\theta^{ML} = \theta^{MAP}$.

■ ❑

2. La distribuzione di uno stimatore a massima verosimiglianza è sempre gaussiana.

❑ ■

3. Si considerino delle V.C. indipendenti $X_i \sim N(m,\sigma_i^2)$, $i = 1,\dots,N$. Allora, $m^{ML} = \sum_{i=1}^{N} X_i/\sigma_i$.

❑ ■

4. Se il vettore dei dati Y e il vettore dei parametri θ sono congiuntamente gaussiani, risulta sempre $\theta^{MAP} = \theta^{B}$.

■ ❑

5. $f_{\theta|Y}(\theta|Y=y)$ non è gaussiana, allora $\theta^{MAP} \neq \theta^{B}$.

❑ ■

6. Se $E[X] = E[Y] = 0$, allora $E[X|Y] = r_{XY}\,Y$.

❑ ■

7. Sia $Y = \Phi\theta^\circ + V$, con $V \sim N(0,\sigma^2\Psi)$. Allora, $E[\theta^{ML}]$ non dipende dal vettore dei dati Y.

■ ❑

8. Nella stima di Bayes di un modello lineare nei parametri, non è necessario ipotizzare $\mathrm{rank}(\Phi) = q$, dove q è la dimensione del vettore θ dei parametri incogniti.

■ ❑

9. Si consideri un modello $Y = \Phi(\theta^\circ) + V$, con $V \sim N(0,I)$. Se la matrice di sensitività $d\Phi/d\theta$ non dipende da θ, $\forall\theta$, e $\mathrm{rank}(d\Phi/d\theta) = q$, allora l'algoritmo di Gauss-Newton converge in un passo.

■ ❑

10. Sia $Y = \Phi\theta^\circ + V$, con $V \sim N(0,\sigma^2\Psi)$. Sia $\varepsilon = Y - \Phi\theta^{ML}$. Allora, $\varepsilon'\Psi\varepsilon/(N-q)$ è una stima non polarizzata di σ^2.

❑ ■