1A. Si consideri il seguente processo casuale

$$y(t) = w(t) + 8w(t-1) + 16w(t-2)\,, \qquad w(\cdot) \sim WGN(0,2)$$

1.a Ricavare il predittore ottimo ad un passo.

$$\mathbf{G(z) = 1 + 8z^{-1} + 16z^{-2} = \frac{(z+4)^2}{z^2}}$$

**Filtro passa-tutto:**

$$\mathbf{T(z) = 16\frac{(z+1/4)^2}{(z+4)^2}}$$

$$\mathbf{\hat{G}(z) = \frac{T(z)\,G(z)}{16} = \frac{(z+1/4)^2}{z^2} = 1 + 0.5z^{-1} + 0.0625z^{-2} = C(z),} \qquad \mathbf{\hat{\sigma}^2 = 2\times 16^2 = 512}$$

**Predittore ottimo per processo MA:**

$$\mathbf{C(z)\,\hat{Y}(z) = [C(z) - 1]\,Y(z)}$$

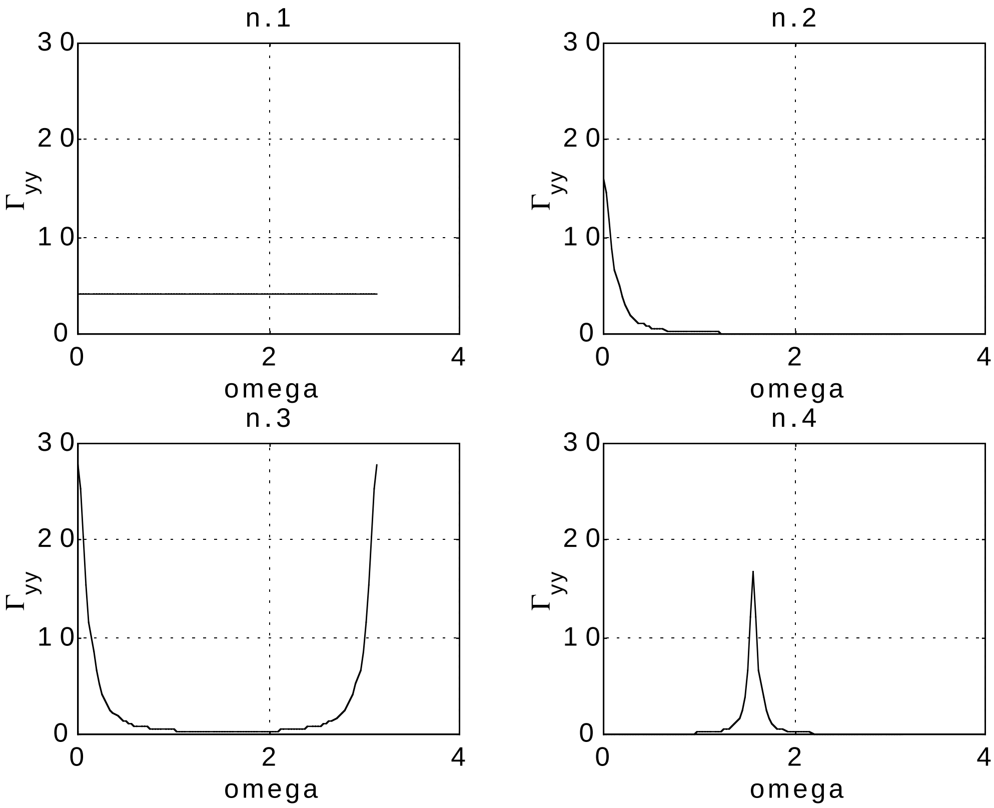
$$\mathbf{[1 + 0.5z^{-1} + 0.0625z^{-2}]\,\hat{Y}(z) = [0.5z^{-1} + 0.0625z^{-2}]\,Y(z)}$$

$$\mathbf{\hat{y}(t\,|\,t-1) = -0.5\,\hat{y}(t-1\,|\,t-2) - 0.0625\,\hat{y}(t-2\,|\,t-3) + 0.5\,y(t-1) + 0.0625\,y(t-2)}$$

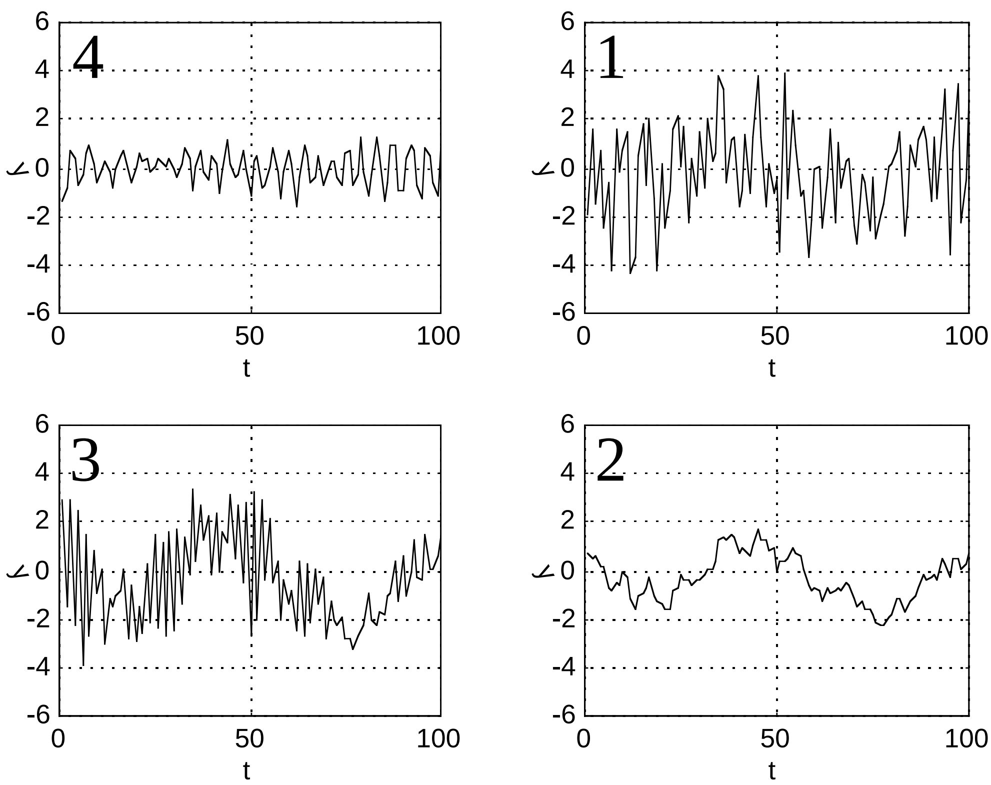
1.b Determinare la varianza dell'errore di predizione ad un passo.

**La varianza dell'errore di predizione ad un passo coincide con la varianza $\hat{\sigma}^2$ = 512 del rumore bianco del fattore spettrale canonico.**

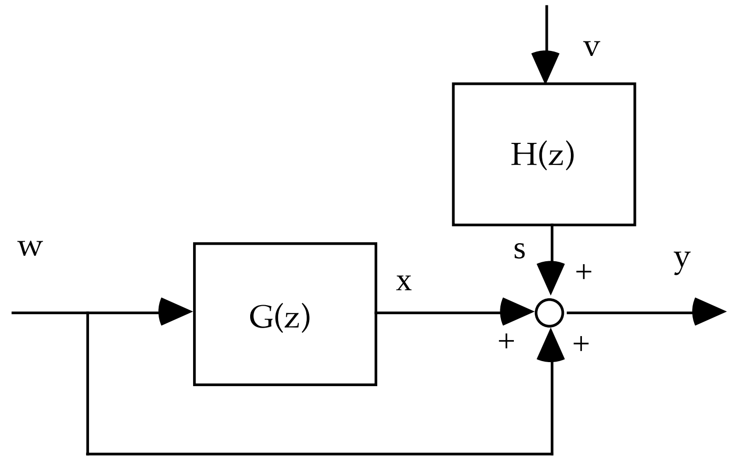
2A. Nei seguenti grafici sono riportate le densità spettrali di potenza di quattro P.C. stazionari




Scrivere sopra il grafico della realizzazione il numero della corrispondente densità spettrale.



3A. Si consideri il seguente schema a blocchi in cui i rumori bianchi $w \sim WN(0,1)$, $v \sim WN(0,1)$ sono tra loro indipendenti:




$$G(z) = 1 + 0.5z^{-1}, \qquad H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

3.a Dire, motivando la risposta, se $x(t)$ e $w(t)$ sono P.C. incorrelati.

**$x(t) = w(t) + 0.5\, w(t-1)$**

**Dato che $Cov[x(t),w(t)] = 1$, i processi $x(t)$ e $w(t)$ non sono incorrelati.**

3.b Ricavare $\gamma_{uu}(\tau)$, dove $u(t) = x(t)+w(t)$.

**$U(z) = [2 + 0.5\, z^{-1}]\, W(z)$ è un MA(1)**

**$\gamma_{uu}(0) = 2^2 + 0.5^2 = 4.25$**

**$\gamma_{uu}(\pm 1) = 2 \times 0.5 = 1$**

**$\gamma_{uu}(\tau) = 0\,,\ |\tau| > 1$**

3.c Ricavare $\gamma_{yy}(\tau)$.

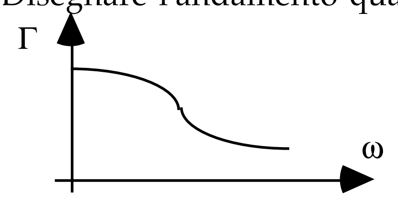
**$H(z)$ è un filtro passa-tutto con guadagno $H(1) = 2$. Perciò, $s \sim WN(0,4)$ .**

**$\gamma_{yy}(0) = \gamma_{uu}(0) + 4 = 2^2 + 0.5^2 = 8.25$**

**$\gamma_{yy}(\pm 1) = \gamma_{uu}(\pm 1) = 1$**

**$\gamma_{yy}(\tau) = \gamma_{uu}(\tau) = 0\,,\ |\tau| > 1$**

3.d Disegnare l'andamento qualitativo di $\Gamma_{yy}(\omega)$.



4A. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

*V* *F*

1. Si consideri un P.C. y(t) ergodico. Allora, la varianza della media temporale calcolata su N valori y(t), t = 0, …, N-1, è pari a Var[y(t)] /N.

❑ ■

2. Una rete neurale formata da uno strato di percettroni (ovvero con nessuno strato nascosto) è un approssimatore universale (è in grado di approssimare arbitrariamente bene qualsiasi funzione continua pur di utilizzare un numero sufficiente di neuroni).

❑ ■

3. Sia $y(t) = 0.2y(t-1) + w(t)$, $y(0) = 0$, $w \sim WGN(0,1)$. Allora, $\lim_{t\to\infty} P(-1.96 \le y(t) \le 1.96) = 0.95$.

❑ ■

4. Sia y(t) un processo casuale stazionario tale che $Y(z) = C(z)W(z)$, $w \sim WN(0,\sigma_w^2)$, dove la f.d.t. $C(z) = 1+cz^{-1}$ è canonica. Allora, $Var[y(t)] < 4\sigma_w^2$.

■ ❑

5. Dato x(t), t = 0, …, N-1, si stima lo spettro mediante la media di due periodogrammi di lunghezza N/2 ciascuno. Tale stimatore è: 1) polarizzato; 2) non consistente.

■ ❑

6. Sia $v(t) = x(t) + y(t)$, dove x(t) e y(t) sono processi casuali stazionari. Allora, $\Gamma_{vv}(\omega) = \Gamma_{xx}(\omega) + \Gamma_{yy}(\omega)$.

❑ ■

7. Per un processo stazionario AR(1), lo spettro $\Gamma_{yy}(\omega)$ raggiunge il suo massimo in $\omega = 0$.

❑ ■

8. Sia y(t) un processo casuale stazionario MA senza zeri di modulo unitario. Allora, l'errore di predizione del predittore ottimo ad un passo ha valore atteso nullo.

■ ❑

9. Sia y(t) un processo casuale stazionario tale che $A(z)Y(z) = C(z)W(z)$, $w \sim WN(m_w,\sigma_w^2)$. Allora, $\Gamma_{yy}(\omega)$ non dipende da $m_w$.

■ ❑

10. Nell'espressione del predittore ottimo ad un passo per un modello ARMAX il polinomio B(z) deve avere tutte le radici con modulo < 1.

❑ ■

1B. Si consideri il seguente processo casuale

$$y(t) = w(t) + 4w(t-1) + 4w(t-2)\,, \qquad w(\cdot) \sim WGN(0,2)$$

1.a Ricavare il predittore ottimo ad un passo.

$$\mathbf{G(z) = 1 + 4z^{-1} + 4z^{-2} = \frac{(z+2)^2}{z^2}}$$

**Filtro passa-tutto:**

$$\mathbf{T(z) = 4\frac{(z+1/2)^2}{(z+2)^2}}$$

$$\mathbf{\hat{G}(z) = \frac{T(z)\,G(z)}{4} = \frac{(z+1/2)^2}{z^2} = 1 + z^{-1} + 0.25z^{-2} = C(z), \quad \hat{\sigma}^2 = 2\times 4^2 = 32}$$

**Predittore ottimo per processo MA:**

$$\mathbf{C(z)\,\hat{Y}(z) = [C(z) - 1]\,Y(z)}$$

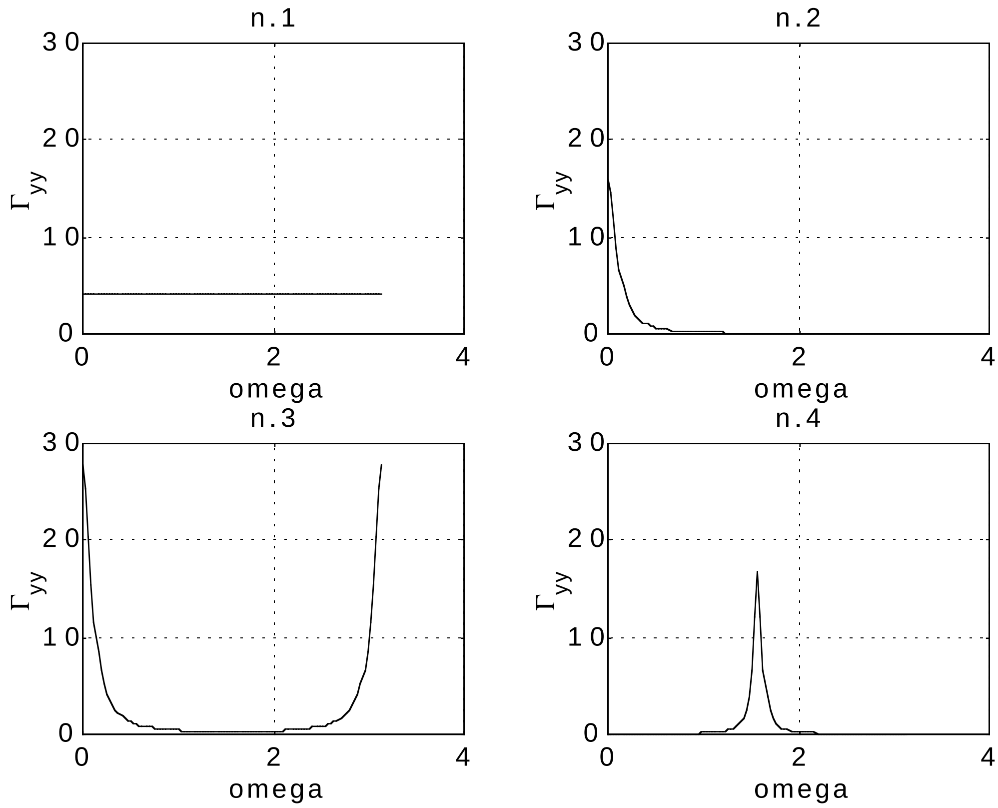
$$\mathbf{[1 + z^{-1} + 0.25z^{-2}]\,\hat{Y}(z) = [z^{-1} + 0.25z^{-2}]\,Y(z)}$$

$$\mathbf{\hat{y}(t\,|\,t-1) = -\,\hat{y}(t-1\,|\,t-2) - 0.25\,\hat{y}(t-2\,|\,t-3) + y(t-1) + 0.25\,y(t-2)}$$

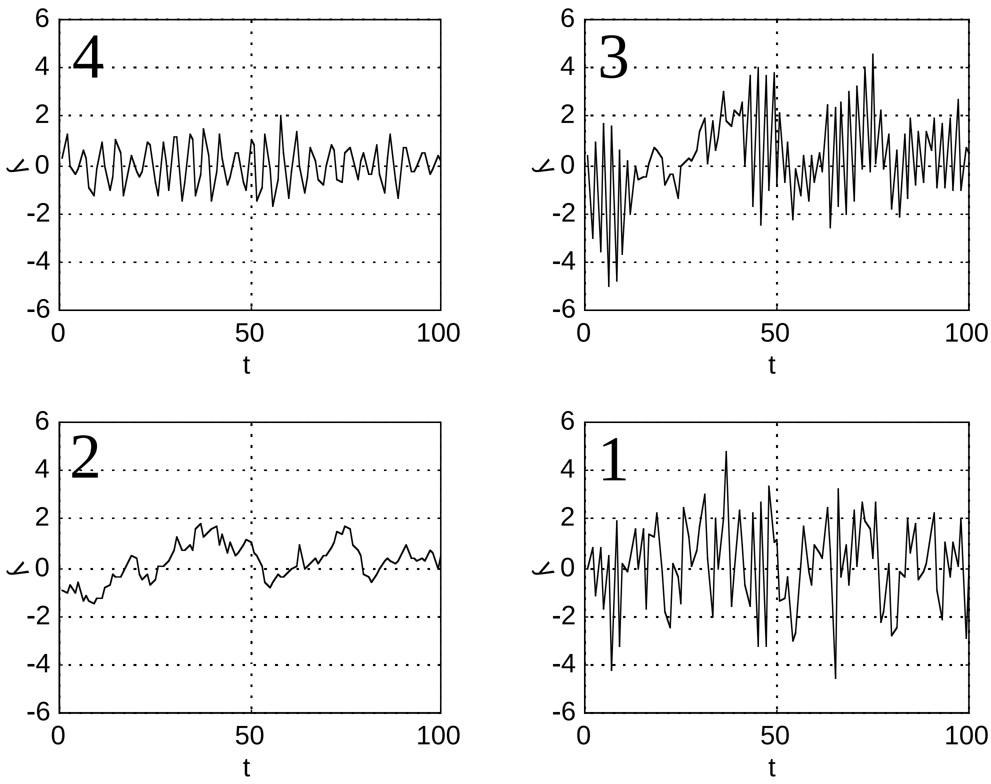
1.b Determinare la varianza dell'errore di predizione ad un passo.

**La varianza dell'errore di predizione ad un passo coincide con la varianza $\hat{\sigma}^2 = 32$ del rumore bianco del fattore spettrale canonico.**

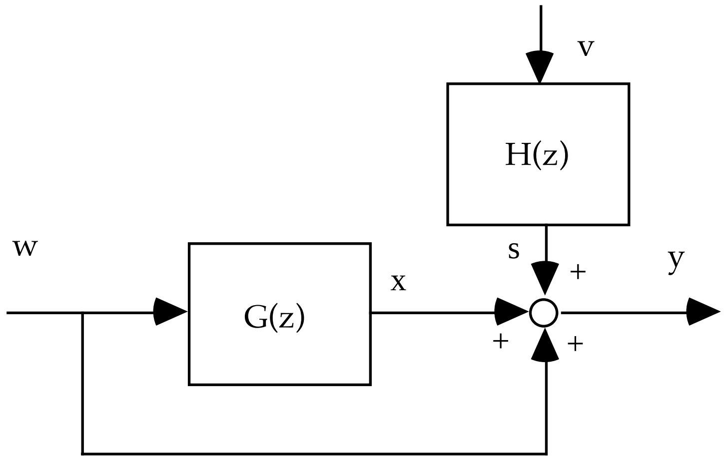
2B. Nei seguenti grafici sono riportate le densità spettrali di potenza di 4 P.C. stazionari




Scrivere sopra il grafico della realizzazione il numero della corrispondente densità spettrale.



3B. Si consideri il seguente schema a blocchi in cui i rumori bianchi w~WN(0,1), v~WN(0,1) sono tra loro indipendenti:




$G(z) = 1 - 0.5z^{-1}$ , $\quad H(z) = \dfrac{1+2z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}}$

3.a Dire, motivando la risposta, se x(t) e w(t) sono P.C. incorrelati.

**x(t) = w(t) - 0.5 w(t-1)**

**Dato che Cov[x(t),w(t)] = 1, i processi x(t) e w(t) non sono incorrelati.**

3.b Ricavare $\gamma_{uu}(\tau)$, dove u(t) = x(t)+w(t).

**$U(z) = [2 - 0.5\, z^{-1}]\, W(z)$ è un MA(1)**

**$\gamma_{uu}(0) = 2^2 + 0.5^2 = 4.25$**

**$\gamma_{uu}(\pm1) = - 2\times0.5 = - 1$**

**$\gamma_{uu}(\tau) = 0\ ,\ |\tau| > 1$**

3.c Ricavare $\gamma_{yy}(\tau)$.

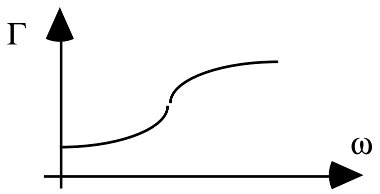
**H(z) è un filtro passa-tutto con guadagno H(1) = 2. Perciò, w~WN(0,4) .**

**$\gamma_{yy}(0) = \gamma_{uu}(0) + 4 = 2^2 + 0.5^2 = 8.25$**

**$\gamma_{yy}(\pm1) = \gamma_{uu}(\pm1) = - 1$**

**$\gamma_{yy}(\tau) = \gamma_{uu}(\tau) = 0\ ,\ |\tau| > 1$**

3.d Disegnare l'andamento qualitativo di $\Gamma_{yy}(\omega)$.



4B. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

*V* *F*

1. Si consideri un P.C. y(t) ergodico. Allora, la varianza della media temporale calcolata su N valori y(t), t = 0, …, N-1, è pari a $\mathrm{Var}[y(t)] / \sqrt{N}$.

❑ ■

2. Una rete neurale formata da due strati di percettroni (ovvero con uno strato nascosto) è un approssimatore universale (è in grado di approssimare arbitrariamente bene qualsiasi funzione continua pur di utilizzare un numero sufficiente di neuroni).

■ ❑

3. Sia $y(t) = 0.5y(t-1) + w(t)$, $y(0) = 0$, $w \sim WGN(0,1)$. Allora, $\lim_{t \to \infty} P(-1.96 \leq y(t) \leq 1.96) = 0.95$.

❑ ■

4. Sia y(t) un processo casuale stazionario tale che $Y(z) = C(z)W(z)$, $w \sim WN(0,\sigma_w^2)$, dove la f.d.t. $C(z) = 1+cz^{-1}$ è canonica. Allora, $\mathrm{Var}[y(t)] < 2\sigma_w^2$.

❑ ■

5. Dato x(t), t = 0, …, N-1, si stima lo spettro mediante la media di due periodogrammi di lunghezza N/2 ciascuno. Tale stimatore è: 1) asintoticamente non polarizzato; 2) non consistente.

■ ❑

6. Sia $v(t) = x(t) - y(t)$, dove x(t) e y(t) sono processi casuali stazionari. Allora, $\Gamma_{vv}(\omega) = \Gamma_{xx}(\omega) + \Gamma_{yy}(\omega)$.

❑ ■

7. Per un processo stazionario AR(1), lo spettro $\Gamma_{yy}(\omega)$ raggiunge il suo massimo in $\omega = 0$ oppure in $\omega = \pi$.

■ ❑

8. Sia y(t) un processo casuale stazionario ARMA senza zeri di modulo unitario. Allora, l'errore di predizione del predittore ottimo ad un passo ha valore atteso nullo.

■ ❑

9. Sia y(t) un processo casuale stazionario tale che $Y(z) = C(z)W(z)$, $w \sim WN(m_w,\sigma_w^2)$. Allora, $\Gamma_{yy}(\omega)$ non dipende da $m_w$.

■ ❑

10. Nell'espressione del predittore ottimo ad un passo per un modello ARMAX il polinomio C(z) deve avere tutte le radici con modulo < 1.

■ ❑