Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati II

Prof. G. De Nicolao

I prova in itinere - 16 Aprile 2015

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Firma** ....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.
2.
3.
4.

1. Si considerino due V.C. congiunte X e θ, entrambe scalari.

   (a) Dimostrare che $E[(\hat{\theta}-\theta)^2|X=x]$ è minimizzato da $\hat{\theta}=E[\theta|X=x]$.

   (b) Si consideri il caso in cui $E[X]=E[\theta]=0$ e si definisca $\hat{\theta}=\alpha X$. Dimostrare che $E[(\hat{\theta}-\theta)^2]$ è minimizzato da $\alpha=E[\theta X]E[X^2]^{-1}$. *Suggerimento: si proceda alla minimizzazione rispetto ad α sfruttando le formule per il calcolo con l'operatore $E[\cdot]$.*

   (c) Scrivere l'espressione di $E[\theta|X=x]$ quando X e θ sono congiuntamente gaussiane (con media diversa da zero).

2. Si consideri una sequenza di prove casuali indipendenti con due possibili esiti: {`successo`, `insuccesso`}, indicando con A_k l'evento {`successo nella` k`-esima prova`} e con $\bar{A}_k$ l'evento {`insuccesso nella` k`-esima prova`}.

   Si assume che
$$P(A_k) = e^{-k\theta}$$

   L'esecuzione di quattro prove produce la seguente sequenza di eventi:
$$A_1, A_2, \bar{A}_3, A_4$$

   Ricavare, riportando i passaggi, l'espressione dello stimatore ML di θ.

3. Si consideri il seguente modello:

$$y_k = e^{\theta t_k} + V_k, k = 1, 2, V \sim N(0, I)$$

dove

$$t_1 = -1, t_2 = 2, y_1 = 1, y_2 = 3$$

(a) Ricavare, riportando i passaggi, l'espressione della matrice di sensitività.

(b) Si assuma che un algoritmo iterativo di Gauss-Newton sia giunto al k-esimo passo con $\theta^{(k)} = ln(2)$. Ricavare, riportando i passaggi, il valore di $\theta^{(k+1)}$.

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) Nella stima a posteriori, se le osservazioni sono indipendenti rispetto a θ, allora θ^B coincide con la media a priori $E[\theta]$.

□ □

(b) Per il modello $Y = \Phi\theta^o + V, V \sim N(0, \sigma^2 I)$, con σ^2 nota, risulta $\theta^{ML} = \theta^{LS}$, se e solo se $\sigma^2 = 1$.

□ □

(c) La matrice varianza di uno stimatore a massima verosimiglianza coincide sempre con l'inversa della matrice di informazione di Fisher.

□ □

(d) In una rete MLP, che non sia stata soggetta a pruning , il numero dei parametri è uguale al numero dei neuroni.

□ □

(e) Per due V.C. scalari X e Y, risulta sempre $Var[X|Y = y] = \sigma_X^2(1 - r_{XY}^2)$.

□ □

(f) Si consideri lo stimatore di Bayes per il modello $Y = \Phi\theta + V, V \sim N(0, \Sigma_V), \theta \sim N(0, \Sigma_\theta)$, $\Sigma_V > 0$, $\Sigma_\theta >, V$ e θ indipendenti. Allora, θ^B è ben definito solo se $rank(\Phi) = q$, $q = dim(\theta)$.

□ □

(g) La varianza dell'errore di stima dello stimatore MS lineare non dipende dalle osservazioni.

□ □

(h) Lo stimatore a posteriori θ^B, se esiste, è sempre unico.

□ □

(i) Per il modello $Y = \Phi\theta^o + V, V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$, se σ^2 è ignota, non si può garantire la gaussianità di θ^{ML}.

□ □

(j) Per il modello $Y = \Phi\theta^o + V, V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$, il vettore dei residui $\epsilon := Y - \Phi\theta^{ML}$ è sempre gaussiano.

□ □