Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati LS

Prof. G. De Nicolao

I prova in itinere - 16 Novembre 2006

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Firma** ....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.	
2.	
3.	
4.	

1. Si consideri il modello $Y = \Phi\Theta + V$, dove $V \sim N(0, \Sigma_V)$ e $\Theta \sim N(m_\Theta, \Sigma_\Theta)$ sono V.C. tra di loro indipendenti. Riportare l'espressione e le proprietà dello stimatore di Bayes.

2. Si consideri il seguente modello:

$$Y_1 = \theta + V_1$$
$$Y_2 = \theta + V_2$$

dove $V \sim N(0, \Psi)$, $\Psi = diag\{1, 2\}$. I dati osservati sono $Y_1 = 3$, $Y_2 = 6$.

(a) Ricavare, riportando i passaggi, la stima θ^{ML}.

$$Y|\theta \sim N(m, \Psi), m = [\theta \quad \theta]'$$

$$L(\theta) = f_{Y|\theta}(Y|\theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det \Psi}} e^{-\frac{1}{2}\left[(Y_1-\theta)^2 + \frac{(Y_2-\theta)^2}{2}\right]}, S(\theta) = \ln L(\theta)$$

$$\frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow Y_1 - \theta + \frac{Y_2 - \theta}{2} = 0 \Rightarrow \theta^{ML} = \frac{2}{3}Y_1 + \frac{1}{3}Y_2 = 4$$

(b) Si assuma che θ sia una V.C. con d.d.p. a priori di tipo esponenziale avente media unitaria. Ricavare, riportando i passaggi, la stima θ^{MAP}.

$$f_{\theta|Y}(\theta|Y) \propto f_{Y|\theta}(Y|\theta) f_\theta(\theta) \Rightarrow \ln f_{\theta|Y}(\theta|Y) = C + \ln f_{Y|\theta}(Y|\theta) + \ln f_\theta(\theta)$$

$$= C' - \frac{1}{2}\left[(Y_1 - \theta)^2 + \frac{(Y_2 - \theta)^2}{2}\right] - \theta$$

Annullando la derivata rispetto a θ:

$$Y_1 - \theta + \frac{Y_2 - \theta}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \theta^{MAP} = 10/3$$

3. Si consideri il seguente modello:

$$Y_k = e^{-\theta t_k} + V_k, Var[V] = I$$

$$t_1 = 0.5, t_2 = 1$$

$$Y_1 = 0.5, Y_2 = 0.5$$

Si supponga che nel corso di un algoritmo iterativo il valore della stima alla k-esima iterazione sia $\theta^{(k)} = 2$.

(a) Ricavare, riportando i passaggi, il valore della matrice di sensitività in corrispondenza di $\theta = \theta^{(k)}$.

$$\Phi(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-0.5\theta} \\ e^{-\theta} \end{bmatrix}, \frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -0.5e^{-0.5\theta} \\ -e^{-\theta} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_\theta^{(k)} = \begin{bmatrix} -0.5e^{-1} \\ -e^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1839 \\ -0.1353 \end{bmatrix}$$

(b) Calcolare $\theta^{(k+1)}$ utilizzando l'algoritmo di Gauss-Newton.

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \left(\Phi_\theta^{(k)\prime} \Phi_\theta^{(k)}\right)^{-1} \Phi_\theta^{(k)\prime} (Y - \Phi(\theta^{(k)})$$

$$= 2 + (0.25e^{-2} + e^{-4})^{-1} \begin{bmatrix} -0.5e^{-1} & -e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-1} \\ 0.5 - e^{-2} \end{bmatrix} = 0.5876$$

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

	V	F
(a) Uno stimatore a massima verosimiglianza può essere polarizzato.	☒	☐
(b) Lo stimatore a massima verosimiglianza della media di V.C. i.i.d. esponenziali è asintoticamente gaussiano.	☒	☐
(c) Le osservazioni Y ed il vettore dei parametri θ sono V.C. congiuntamente gaussiane se e solo se $\theta^{MAP} = \theta^B$.	☐	☒
(d) Se X e Y sono V.C congiuntamente gaussiane con media nulla e varianza unitaria, allora $E[X\|Y = y] = r_{XY} y$.	☒	☐
(e) In generale $E[X\|Y = y]$ è una funzione non lineare di y.	☒	☐
(f) Per il modello $Y = \Phi\theta^o + V, V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$, θ^{ML} è uno stimatore a minima varianza.	☒	☐
(g) Per il modello $Y = \Phi(\theta^o) + V, V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$, θ^{ML} è sempre gaussiano.	☐	☒
(h) Si consideri lo stimatore di Bayes per il modello $Y = \Phi\theta + V, V \sim N(0, \Sigma_V), \theta \sim N(0, \Sigma_\theta)$. Allora, θ^B dipende linearmente da Y.	☒	☐
(i) Si consideri il confronto tra modelli lineari nei parametri. Le condizioni di applicabilità del criterio C_p sono meno restrittive di quelle del test F.	☒	☐
(j) In una rete MLP, il numero dei parametri è uguale al numero dei neuroni.	☐	☒