Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati LS

Prof. G. De Nicolao

I prova in itinere - 22 Novembre 2007

Cognome ....   **Nome** ....

Matricola ....   **Firma** ....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.
2.
3.
4.

1. Si consideri il modello $Y = \Phi\theta^o + V$, dove $V \sim N(0, \Sigma_V)$.

   (a) La stima θ^{ML} può essere scritta nella forma $\theta^{ML} = CY$: scrivere l'espressione della matrice C.

   (b) Dire, motivando la risposta, se θ^{ML} è distribuito gaussianamente.

   (c) Dimostrare, motivando la risposta, che θ^{ML} è non polarizzato.

   (d) Ricavare, riportando i passaggi, l'espressione di $Var[\theta^{ML}]$.

2. Siano X_i, $i = 1, \dots, 20$ delle V.C. i.i.d. esponenziali con media $E[X_i] = 1/\lambda$. Si sa che tra i primi 10 valori di X_i sono 5 quelli minori di 1. Inoltre, risulta che tra gli ultimi 10 valori di X_i sono 3 quelli maggiori di 2.

   (a) Ricavare, riportando i passaggi, la stima λ^{ML} basata su $\{X_i, i = 1, \dots, 10\}$.
   Si tratta di 10 prove di Bernoulli con

   $$p = P(X_i < 1) = F_{X_i}(1) = 1 - e^{-\lambda}$$

   In base alla formua della binomiale, la log-verosimiglianza è

   $$\begin{aligned} S_1(\lambda) &= \ln\left\{ \binom{10}{5} (1 - e^{-\lambda})^5 (e^{-\lambda})^5 \right\} \\ &= \ln \binom{10}{5} + 5\ln(1 - e^{-\lambda}) - 5\lambda \end{aligned}$$

   $$\frac{dS_1}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{5e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} - 5 = 0 \Rightarrow \lambda^{ML} = -\ln 0.5 = 0.6931$$

   (b) Ricavare, riportando i passaggi, la stima λ^{ML} basata su $\{X_i, i = 11, \dots, 20\}$.
   In questo caso,

   $$p = P(X_i > 2) = 1 - F_{X_i}(2) = e^{-2\lambda}$$

   $$\begin{aligned} S_2(\lambda) &= \ln\left\{ \binom{10}{3} (e^{-2\lambda})^3 (1 - e^{-2\lambda})^7 \right\} \\ &= \ln \binom{10}{3} - 6\lambda + 7\ln(1 - e^{-2\lambda}) \end{aligned}$$

   $$\frac{dS_2}{d\lambda} = 0 \Rightarrow -6 + \frac{14e^{-2\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}} = 0 \Rightarrow \lambda^{ML} = -0.5\ln 0.3 = 0.6020$$

   (c) Ricavare, riportando i passaggi, la stima λ^{ML} basata su $\{X_i, i = 1, \dots, 20\}$.
   Grazie all'ipotesi di indipendenza, la verosimiglianza è il prodotto delle verosimiglianze dei due punti precedenti:

   $$S(\lambda) = S_1(\lambda) + S_2(\lambda)$$

   $$\frac{dS}{d\lambda} = \frac{dS_1}{d\lambda} + \frac{dS_2}{d\lambda} = \frac{5e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} - 11 + \frac{14e^{-2\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}}$$

Ponendo $x := e^{-\lambda}$ e imponendo $dS/d\lambda = 0$, si ottiene

$$30x^2 + 5x - 11 = 0 \Rightarrow x = 0.5279 \Rightarrow \lambda^{ML} = -\ln 0.5279 = 0.6388$$

3. Si consideri il seguente modello:

$$Y_k = \ln(\theta) + V_k, k = 1, \ldots, 101, V \sim N(0, \sigma^2 I)$$

Si supponga che, mediante un algoritmo iterativo, si sia ottenuto $\theta^{ML} = 2$.

(a) Ricavare, riportando i passaggi, il valore della matrice di sensitività in corrispondenza di $\theta = \theta^{ML}$.

$$\Phi(\theta) = \begin{bmatrix} \ln\theta & \ln\theta & \ldots & \ln\theta \end{bmatrix}^T, \qquad \Phi(\theta) \in \mathbb{R}^{101}$$

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta} & \frac{1}{\theta} & \ldots & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix}^T, \qquad \bar{\Phi} := \left.\frac{d\Phi}{d\theta}\right|_{\theta=2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ldots & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$$

(b) Supponendo che $SSR = 2500$, ricavare $\hat{\sigma}^2$.
Ricordando che $n = 101$ e $q = 1$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSR}{n-q} = \frac{2500}{100} = 25$$

(c) Ricavare l'intervallo di confidenza al 95% di θ.
Prima di tutto, si ricava un'approsimazione della varianza del parametro stimato:

$$Var[\theta^{ML}] \simeq \hat{\sigma}^2 \left(\bar{\Phi}^T \bar{\Phi}\right)^{-1} = 25 \times \frac{4}{101} = 0.99$$

Dato il valore elevato di n, si può usare la normale al posto della t di Student:

$$\begin{aligned} I_{0.95} &= \left[\theta^{ML} - 1.96\sqrt{Var[\theta^{ML}]}, \theta^{ML} + 1.96\sqrt{Var[\theta^{ML}]}\right] \\ &= \left[2 - 1.96 \times \sqrt{0.99}, 2 + 1.96 \times \sqrt{0.99}\right] \\ &= [0.0497, 3.95] \end{aligned}$$

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) Uno stimatore a massima verosimiglianza è sempre gaussiano.

☐ ☒

(b) Lo stimatore a massima verosimiglianza della media di V.C. i.i.d. gaussiane coincide con la media campionaria.

☒ ☐

(c) Se le osservazioni Y ed il vettore dei parametri θ sono V.C. congiuntamente gaussiane lo stimatore di Bayes coincide con lo stimatore MS lineare.

☒ ☐

(d) Se X e Y sono V.C. scalari congiuntamente gaussiane, allora $Var[X|Y = y] = (1 - r_{XY}^2)$.

☐ ☒

(e) Date X e Y V.C. scalari, $E[X|Y = y]$ non dipende da y se e solo se X e Y sono indipendenti.

☐ ☒

(f) Per il modello $Y = \Phi\theta^o + V, V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$, θ^{ML} non dipende da σ^2.

☒ ☐

(g) Per il modello $Y = \Phi(\theta^o) + V, V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$, θ^{ML} è gaussiano.

☐ ☒

(h) Si consideri lo stimatore di Bayes per il modello $Y = \Phi\theta + V, V \sim N(0, \Sigma_V), \theta \sim N(0, \Sigma_\theta)$, $\Sigma_V > 0$, $\Sigma_\theta > 0$. Allora, θ^B è ben definito anche se $rank(\Phi) < q$, $q = dim(\theta)$.

☒ ☐

(i) Per il modello $Y = \Phi\theta^o + V$, le ipotesi per l'applicabilità dello stimatore $BLUE$ sono più restrittive di quelle per l'applicabilità dello stimatore ML.

☐ ☒

(j) In un modello nonlineare nei parametri il rango della matrice di sensitività può dipendere dal valore di θ intorno a cui si linearizza.

☒ ☐