Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati LS

Prof. G. De Nicolao

Prova scritta del 24 Febbraio 2006

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Firma** ....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.	
2.	
3.	
4.	

1. Si consideri il modello

$$y_k = \frac{1}{2}\theta_1^2 x_k + \frac{2}{3}\theta_2^3 x_k^2 + v_k, \quad k = 1, \ldots, 3$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$$

dove $v_k \sim N(0,2)$ sono V.C. indipendenti.

Si supponga che, avendo elaborato le misure y_k, l'identificazione del modello abbia dato come risultato $\theta^{ML} = [\ 2 \quad 1\ ]'$

(a) Calcolare la matrice di sensitività in corrispondenza di $\theta = \theta_{ML}$.

(b) Calcolare un'approssimazione di $Var[\theta^{ML}]$.

(c) Calcolare l'intervallo di confidenza al 95% per θ_1.

2. Si consideri il problema dell'identificazione LS di un modello ARX.

   (a) Scrivere il modello e definire il vettore θ dei parametri.

   (b) Descrivere la struttura della matrice Φ.

   (c) Scrivere la formula per il calcolo di θ^{LS}.

   (d) Scrivere la formula per la stima di σ^2.

   (e) Scrivere la formula per la stima di $Var[\theta^{LS}]$.

3. Si consideri il seguente modello ARMAX:

$$y(t) = 0.4y(t-2) + 0.5u(t-2) + 2w(t) + w(t-1), \quad w(t) \sim WN(0,1)$$

(a) Ricavare il fattore spettrale canonico.

(b) Scrivere l'espressione del predittore ottimo ad un passo nel dominio della trasformata zeta.

(c) Scrivere l'espressione del predittore ottimo ad un passo nel dominio del tempo.

(d) Calcolare la varianza dell'errore di predizione ad un passo.

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

   (a) Gli stimatori a massima verosimiglianza sono sempre non polarizzati.

   □ □

   (b) Se i dati e i parametri sono congiuntamente gaussiani, la stima MAP e la stima di Bayes (valore atteso condizionato) coincidono sempre.

   □ □

   (c) La media campionaria di V.C. i.i.d. gaussiane è lo stimatore a minima varianza della media.

   □ □

   (d) Per il modello $Y = \Phi\theta + V$, $V \sim N(0, \sigma^2)$, con σ^2 nota, $Var[\theta^{ML}]$ non dipende da Y.

   □ □

   (e) La media campionaria di V.C. i.i.d. esponenziali è lo stimatore a massima verosimiglianza della media.

   □ □

   (f) Se $y(t)$ è un processo ARMA con varianza strettamente positiva, allora $\Gamma_{yy}(\omega) = 0$, se e solo se $z = e^{j\omega}$ è uno zero del fattore spettrale canonico.

   □ □

   (g) Sia $v(t) = y(t) - x(t)$, dove $y(t)$ e $x(t)$ sono processi casuali stazionari: Allora, risulta $\Gamma_{vv}(\omega) = \Gamma_{yy}(\omega) + \Gamma_{xx}(\omega)$.

   □ □

   (h) Sia $Y(z) = G(z)X(z)$, dove $x(t)$ è un processo casuale stazionario (scalare) e $G(z)$ è asintoticamente stabile. Allora $\Gamma_{yy}(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2\Gamma_{xx}(\omega)$.

   □ □

   (i) Si consideri il predittore ottimo per un modello ARMA il cui fattore spettrale canonico non ha zeri con modulo unitario. Allora, l'errore si predizione è un processo stazionario.

   □ □

   (j) In un modello ARMAX, senza ledere la generalità, si può sempre ipotizzare che $c_0 = 1$.

   □ □