Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati II

Prof. G. De Nicolao

II prova in itinere - 25 Giugno 2014

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Firma** ....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.	
2.	
3.	
4.	

1. Si consideri un processo stazionario ergodico $x(t), t = 0, \ldots, N-1$.

   (a) Scrivere la definizione dello stimatore $c'_{xx}(t)$ e calcolarne il valore atteso.

   (b) Scrivere la definizione dello stimatore $c_{xx}(t)$ e calcolarne il valore atteso.

   (c) Scrivere la definizione del periodogramma $I_N(\omega)$ e dire, motivando la risposta, se è uno stimatore polarizzato.

2. Si consideri il seguente modello X:

$$y(t) = b_0 2u(t-1) + b_1 u(t-2) + w(t), \quad w(t) \sim WN(0, \sigma^2)$$

(a) Scrivere il modello nella forma

$$y(t) = \phi(t)'\theta + w(t), \quad w(t) \sim WN(0, \sigma^2)$$

riportando la definizione di $\phi(t)$, θ e $S(t)$.

(b) Si applichi l'ingresso $u(i) = 1$, per i pari e $u(i) = -1$, per i dispari. Dire, motivando la risposta, se $S(t)$ è invertibile $\forall t$.

(c) Si applichi l'ingresso $u(i) = 1$, per i pari e $u(i) = 0$, per i dispari. Dire, motivando la risposta, se $S(t)$ è invertibile $\forall t$.

(d) Interpretare le due risposte precedenti alla luce della nozione di persistente eccitazione.

(e)

3. Si consideri il seguente modello ARMA:

$$y(t) = -0.25y(t-1) + 2w(t-1) + 4w(t-2), \quad w(t) \sim WN(0,1)$$

(a) Ricavare, riportando i principali passaggi, il fattore spettrale canonico.

(b) Scrivere l'espressione del predittore ottimo ad un passo nel dominio della trasformata zeta.

(c) Scrivere l'espressione del predittore ottimo ad un passo nel dominio del tempo.

(d) Calcolare la varianza dell'errore di predizione ad un passo.

(e) Scrivere, motivando la risposta, espressione del.predittore ottimo per il processo ARMAX

$$y(t) = -0.25y(t-1) + 2u(t-2) + 2w(t-1) + 4w(t-2), \quad w(t) \sim WN(0,1)$$

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) Sia $x(t)$ un processo casuale ergodico. Allora, $E[x(t)]$ non dipende da t.

□ □

(b) Un processo stazionario AR(n) è persistentemente eccitante di ordine n.

□ □

(c) Sia $Y(z) = G(z)W(z)$ dove $G(z)$ è una f.d.t asintoticamente stabile e $w(t) \sim WN(0, \sigma^2)$. Allora, $Var[y(t)]$ è ricavabile a partire dalla conoscenza di σ^2 e di $G(1)$.

□ □

(d) Per modelli ARMA, l'identificazione basata sulla minimizzazione dell'errore di predizione conduce ad un problema di stima lineare nei parametri.

□ □

(e) Per un P.C. stazionario $y(t)$ risulta sempre che l'area sottesa da $\Gamma_{yy}(\omega)$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è maggiore della varianza dell'errore di predizione ad un passo..

□ □

(f) Si consideri il modello $y(t) = ay(t-1) + w(t), |a| < 1, w(t) \sim WN(0,1)$. Allora, $\Gamma_{yy}(0) = 1/(1-a^2)$

□ □

(g) Dato un P.C. stazionario $y(t)$, se esiste z tale che $\Phi_{yy}(z) = 0$, allora non esiste il predittore ottimo ad un passo.

□ □

(h) Dati due P.C. stazionari $x(t)$ e $y(t)$ con $Cov[x(t), y(t)] > 0$, risulta sempre $Var[x(t) + y(t)] > 0$.

□ □

(i) Un P.C. gaussiano $x(t)$ è completamente caratterizzato dal punto di vista probabilistico, se sono note $E[x(t)]$, $\forall t$, e $Cov[x(t), x(\tau)]$, $\forall t, \tau$.

□ □

(j) Si consideri un P.C. $x(t)$ stazionario la cui $\Gamma_{xx}(\omega)$ non si annulla mai. Allora, esiste il predatore ottimo ad un passo e la varianza dell'errore di predizione non è mai maggiore di $\Gamma_{xx}(0)$.

□ □

5. Correggere eventuali errori nel listato MATLAB che riporta le istruzioni descritte dal seguente testo:

   "Data una serie temporale y, di 240 elementi, stimarne la densità spettrale di potenza, mediante il periodogramma e visualizzare il risultato."

```
y=y(:);
ny=length(y):
yy=y-mean(y);
yy=[yy zeros(1024-ny,1)]; % aggiungo zeri in coda ("zero padding")
P=(fft(yy))/ny;
w=(1:ny)';       % asse delle frequenze
plot(w,P),title(periodogramma)
```