1. Si considerino delle V.C. X_i, $1 \leq i \leq n$, i.i.d., gaussiane, $X_i \sim N(m, \sigma^2)$. Ricavare, riportando i passaggi, la stima a massima verosimiglianza di m e σ^2.

2. Si effettua un esperimento che fornisce il valore X di una V.C. con d.d.p. esponenziale tale che $E[X] = 1/\lambda$. Sapendo che $1 < X \leq 2$, ricavare, riportando i passaggi, il valore λ^{ML} della stima ML di λ.

$$\begin{array}{rcl} & P(1 < X \leq 2) & = \\ = & F_X(2) - F_X(1) & = \\ = & 1 - e^{-2\lambda} - (1 - e^{-\lambda}) & \end{array}$$

$$L(\lambda) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{dL(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow & -e^{-\lambda} + 2e^{-2\lambda} = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & 2e^{-\lambda} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & e^{-\lambda} = \frac{1}{2} & \Rightarrow \\ \Rightarrow & \lambda^{ML} = \ln 2 & \end{array}$$

3. Si consideri il seguente modello:

$$y_k = t_k\theta_1^2 + \theta_2 + v_k, Var[V] = 2I$$
$$t_1 = -1, t_2 = -2, t_3 = 3$$

Si supponga che $\theta^{ML} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(a) Ricavare, riportando i passaggi, il valore della matrice di sensitività in corrispondenza di $\theta = \theta^{ML}$.

$$\Phi(\theta) = \begin{bmatrix} -\theta_1^2 + \theta_2 \\ -2\theta_1^2 + \theta_2 \\ 3\theta_1^2 + \theta_2 \end{bmatrix} \qquad \frac{d\phi(\theta)}{d\theta} = \begin{bmatrix} -2\theta_1 & 1 \\ -4\theta_1 & 1 \\ 6\theta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Calcolare una stima di $Var[\theta^{ML}]$.

$$\begin{aligned} & Var\left[\theta^{ML}\right] & \cong \\ \cong \quad & \sigma^2\left(\hat{\Phi}^T\Psi^{-1}\hat{\Phi}\right)^{-1} & = \\ = \quad & 2\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} & = \\ = \quad & 2\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} & = \\ = \quad & \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} & \end{aligned}$$

(c) Calcolare una stima dell'intervallo di confidenza al 95% per θ_2.

$$Var\left[\theta_2^{ML}\right] \cong \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} & I_{0.95}\left(\theta_2\right) & \cong \\ \cong \quad & \left[1 - 1.96\sqrt{\tfrac{2}{3}},\ 1 + 1.96\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right] & = \\ = \quad & [-0.6, 2.6] & \end{aligned}$$

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) La varianza di uno stimatore polarizzato può essere minore di quella dello stimatore a massima verosimiglianza.

☒ ☐

(b) La quantità $E[\hat{\theta} - \theta|X]$ è minimizzata ponendo $\hat{\theta} = E[\theta|X]$.

☐ ☒

(c) Se le osservazioni condizionate rispetto a θ sono V.C. indipendenti, allora $\theta^{MAP} = \theta^{B}$.

☐ ☒

(d) Se X e Y sono V.C congiuntamente gaussiane con media nulla e varianza unitaria, allora $E[X|Y] = Cov[X,Y]Y$.

☒ ☐

(e) Per il modello $Y = \Phi\theta^o + V, V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$, risulta sempre $\theta^M = \theta^{ML}$.

☒ ☐

(f) Per il modello $Y = \Phi\theta^o + V, V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$, θ^{ML} è non polarizzato.

☒ ☐

(g) Per il modello $Y = \Phi\theta^o + V, V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$, θ^{ML} è sempre gaussiano.

☒ ☐

(h) Si consideri lo stimatore di Bayes per il modello $Y = \Phi\theta + V, V \sim N(0, \Sigma_V), \theta \sim N(0, \Sigma_\theta)$. Se Σ_V e Σ_θ sono note, $Var[\theta|Y]$ non dipende da Y.

☒ ☐

(i) Si consideri il confronto tra modelli lineari nei parametri. Allora, il criterio C_p si applica solo a modelli gerarchici.

☐ ☒

(j) In un modello non lineare nei parametri, la matrice di sensitività dipende da θ.

☒ ☐

1. Si considerino delle V.C. X_i, $1 \leq i \leq n$, i.i.d., gaussiane, $X_i \sim N(m, \sigma^2)$. Ricavare, riportando i passaggi, la stima a massima verosimiglianza di m e σ^2.

2. Si effettua un esperimento che fornisce il valore X di una V.C. con d.d.p. esponenziale tale che $E[X] = 1/\lambda$. Sapendo che $0.5 < X \leq 1$, ricavare, riportando i passaggi, il valore λ^{ML} della stima ML di λ.

$$\begin{array}{ccc} & P(0.5 < x \leq 1) & = \\ = & F_x(1) - F_x(0.5) & = \\ = & 1 - e^{-\lambda} - (1 - e^{-0.5\lambda}) & \\ = & e^{-0.5\lambda} - e^{-\lambda} & \end{array}$$

$$L(\lambda) = e^{-0.5\lambda} - e^{-\lambda}$$

$$\begin{array}{rccc} \frac{dL(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow & -0.5e^{-0.5\lambda} + e^{-\lambda} = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & e^{-\lambda} = 0.5e^{-0.5\lambda} & \Rightarrow \\ \Rightarrow & e^{-0.5\lambda} = 0.5 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & 0.5\lambda = \ln 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & \lambda^{ML} = 2\ln 2 & \end{array}$$

3. Si consideri il seguente modello:

$$y_k = \theta_1 + t_k\theta_2^2 + v_k, Var[V] = 2I$$
$$t_1 = -1, t_2 = -2, t_3 = 3$$

Si supponga che $\theta^{ML} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(a) Ricavare, riportando i passaggi, il valore della matrice di sensitività in corrispondenza di $\theta = \theta^{ML}$.

$$\Phi(\theta) = \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_2^2 \\ \theta_1 - 2\theta_2^2 \\ \theta_1 + 3\theta_2^2 \end{bmatrix} \qquad \frac{d\Phi(\theta)}{d\theta} = \begin{bmatrix} 1 & -2\theta_2 \\ 1 & -4\theta_2 \\ 1 & 6\theta_2 \end{bmatrix}$$

(b) Calcolare una stima di $Var[\theta^{ML}]$.

$$\begin{aligned} & Var\left[\theta^{ML}\right] && \cong \\ \cong \quad & \sigma^2\left(\hat{\Phi}^T\Psi^{-1}\hat{\Phi}\right)^{-1} && = \\ = \quad & 2\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -4 \\ 1 & +6 \end{bmatrix}\right)^{-1} && = \\ = \quad & 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 56 \end{bmatrix}^{-1} && = \\ = \quad & \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{28} \end{bmatrix} && \end{aligned}$$

(c) Calcolare una stima dell'intervallo di confidenza al 95% per θ_1.

$$Var\left[\theta_1^{ML}\right] \cong \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} & I_{0.95}\left(\theta_1\right) && \cong \\ \cong \quad & \left[0.5 - 1.96\sqrt{\tfrac{2}{3}},\, 0.5 + 1.96\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right] && = \\ = \quad & [-1.1,\, 2.1] && \end{aligned}$$

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

	V	F
(a) Per il modello $Y = \Phi\theta^o + V, V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$, θ^{ML} è non polarizzato se e solo se Ψ è diagonale.	☐	☒
(b) La quantità $E[(\hat{\theta} - \theta)^2 \vert X]$ è minimizzata ponendo $\hat{\theta} = E[\theta \vert X]$.	☒	☐
(c) Se X e Y sono V.C congiuntamente gaussiane con media nulla e $Var[X] = Var[Y] = 2$, allora $E[X \vert Y] = 2Cov[X, Y]Y$.	☐	☒
(d) Se le osservazioni condizionate rispetto a θ sono V.C. indipendenti, non è detto che $\theta^{MAP} = \theta^{B}$.	☒	☐
(e) Per il modello $Y = \Phi\theta^o + V, V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$, può risultare $\theta^M \neq \theta^{ML}$.	☐	☒
(f) Si consideri il confronto tra modelli lineari nei parametri. Allora, il criterio C_p si applica anche a modelli non gerarchici.	☒	☐
(g) Per il modello $Y = \Phi\theta^o + V, V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$, θ^{ML} è sempre gaussiano se e solo se Ψ è diagonale.	☐	☒
(h) In un modello lineare nei parametri, la matrice di sensitività non dipende da θ.	☒	☐
(i) La varianza di uno stimatore non polarizzato può essere minore di quella dello stimatore a massima verosimiglianza.	☒	☐
(j) Si consideri lo stimatore di Bayes per il modello $Y = \Phi\theta + V, V \sim N(0, \Sigma_V), \theta \sim N(0, \Sigma_\theta)$. Se Σ_V e Σ_θ sono note, $Var[\theta \vert Y]$ dipende da Y.	☐	☒