Sistemi lineari invarianti a tempo discreto

G. De Nicolao (Università di Pavia)

January 21, 2011

Risposta impulsiva

Risposta impulsiva

Definizione: S è un sistema Lineare Tempo Invariante (LTI) causale Single-Input Single-Output (SISO) a tempo discreto se

$$y(t) = \sum_{i=-\infty}^{t} g(t-i)u(i) = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)u(t-j)$$

convoluzione discreta

- $u(t) = \mathrm{imp}(t) \Rightarrow y(t) = g(t)$
- $g(t)$: *risposta impulsiva* $(g(t) = 0,\ t < 0)$

Funzione di trasferimento

Funzione di trasferimento

- **Definizione:** *Funzione di trasferimento*

$$G(z) = Z[g(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} g(t) z^{-t}$$

- $Y(z) = G(z)U(z)$
- **Esempio:** $y(t) = ay(t-1) + u(t) + bu(t-1)$

$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + U(z) + bz^{-1}U(z)$$

$$(1 - az^{-1})Y(z) = (1 + bz^{-1})U(z)$$

$$Y(z) = \frac{1 + bz^{-1}}{1 - az^{-1}} U(z) = \frac{z+b}{z-a} U(z) \Rightarrow G(z) = \frac{z+b}{z-a}$$

Poli e zeri

- **Definizione:** S è detto *a dimensioni finite* se il legame tra $u(t)$ e $y(t)$ è esprimibile mediante un'equazione alle differenze:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(t-i) + \sum_{i=0}^{n_b} b_i u(t-i)$$

- Se S è a dimensioni finite, allora la funzione di trasferimento $G(z)$ è razionale fratta (rapporto di polinomi):

$$G(z) = \frac{\sum_{i=0}^{n_b} b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i}} = \frac{N_G(z)}{D_G(z)}$$

- Radici di $N_G(z)$: *zeri*
- Radici di $D_G(z)$: *poli*

Stabilità

Stabilità e poli

- **Definizione:** S è (asintoticamente) *stabile* se $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$
  (l'effetto di un impulso si smorza per $t \to \infty$)
- **Esempio:**

$$y(t) = ay(t-1) + u(t)$$

$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + U(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{z}{z-a}U(z)$$

  - Polo in $z = a$
  - Risposta impulsiva: $g(t) = a^t$
  - Stabile se e solo se $|a| < 1$
- **Proprietà:** Un sistema a dimensioni finite è asintoticamente stabile se e solo se tutti i poli hanno modulo < 1

Guadagno

- **Definizione:** *Guadagno*

$$\mu := G(1) = \sum_{t=0}^{\infty} g(t)$$

- **Proprietà:** Se applico $u(t) = \mathrm{sca}(t)$ ad un sistema stabile con $|\mu| < \infty$, allora

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \mu$$

Risposta in frequenza

Risposta in frequenza

- **Teorema della risposta in frequenza:** Si consideri un sistema asintoticamente stabile. Allora, $u(t) = A\sin(\omega t)$ implica $\lim_{t\to\infty} y(t) - \tilde{y}(t) = 0$, dove

$$\tilde{y}(t) := A|G(e^{j\omega})|\sin(\omega t + \arg[G(e^{j\omega})])$$

- *Interpretazione:* Un ingresso $u(t)$ sinusoidale di pulsazione ω produce, asintoticamente, un'uscita $y(t)$ sinusoidale con la stessa pulsazione e con ampiezza e fase determinabili a partire dalla f.d.t. $G(z)$ valutata in $z = e^{j\omega}$.
- $G(e^{j\omega})$ è detta *risposta in frequenza*
- Modo rapido per intuire la forma di $G(e^{j\omega})$ al variare di ω: "tendone del circo"