# Sistemi lineari con ingresso stocastico

G. De Nicolao (Università di Pavia)

January 21, 2011

# Media e densità spettrale

# Media

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

**Ipotesi:**

1. $u(t)$ processo casuale stazionario in senso lato $\Leftrightarrow$ momenti del I e II ordine stazionari:
   - media $m_u := E[u(t)]$ non dipende da $t$
   - autocovarianza $\gamma_{uu}(\tau) := Cov[u(t), u(t+\tau)]$ dipende solo da $\tau$
2. $G(z)$ rapporto di polinomi con poli stabili (modulo $< 1$).

**Proposizione:** $m_y := E[y(t)] = G(1)m_u = \mu m_u$

# Densità spettrale 1/2

**Proposizione:** Sotto le Ipotesi 1 e 2, $y(t)$ è un processo casuale stazionario in senso lato.

**Proposizione:** La densità spettrale di $y(t)$ è data da

$$\Gamma_{yy}(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2 \Gamma_{uu}(\omega)$$

$$\Phi_{yy}(z) = G(z)G(z^{-1})\Phi_{uu}(z)$$

**Estensione:** Siano $u(t)$ e $y(t)$ processi vettoriali

$$\Gamma_{yy}(\omega) = G(e^{j\omega})\Gamma_{uu}(\omega)G(e^{-j\omega})^T$$

$$\Phi_{yy}(z) = G(z)\Phi_{uu}(z)G(z^{-1})^T$$

# Densità spettrale 2/2

**Osservazioni:**

- $|G(e^{j\omega})|$ "modula" la densità spettrale di $u(t)$
- Dato $\Gamma_{yy}(\omega)$, se riesco a trovare $G(z)$ (*shaping filter*) stabile e tale che $\Gamma_{yy}(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2$, posso simulare $y(t)$ come l'uscita di un sistema $G(z)$ con ingresso un $w(t) \sim \mathrm{WN}(0, 1)$

$$Y(z) = G(z)W(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma_{yy}(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2 \Gamma_{ww}(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2$$

# Processi a spettro razionale

# Processi a spettro razionale

**Definizione:** Un processo casuale stazionario $y(t)$ è detto *a spettro razionale* se esiste un rapporto di polinomi $G(z)$ con poli stabili tale che

$$\Phi_{yy}(z) = G(z)G(z^{-1})$$

**Osservazione:** Se $\bar{z}$ è una radice del denominatore (numeratore) della densità spettrale $\Phi_{yy}(z)$ di un processo a spettro razionale, allora è radice del denominatore (numeratore) anche $1/\bar{z}$.

# Processi MA

# Processi MA

**Definizione:** Un processo casuale stazionario $y(t)$ è detto *a spettro razionale* se esiste un rapporto di polinomi $G(z)$ con poli stabili tale che

$$\Phi_{yy}(z) = G(z)G(z^{-1})$$

**Osservazione:** Se $\bar{z}$ è una radice del denominatore (numeratore) della densità spettrale $\Phi_{yy}(z)$ di un processo a spettro razionale allora sono radici del denominatore (numeratore) anche: $1/\bar{z}$, $\bar{z}^*$, $1/\bar{z}^*$.

# Processi MA($n$): definizione

**Definizione:** Processo MA($n$):

$$y(t) = c_0 w(t) + c_1 w(t-1) + \ldots + c_n w(t-n), \qquad w(t) \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$$

- $w(t) \sim \mathrm{WGN} \Rightarrow y(t)$ è gaussiano (combinazione lineare di V.C. gaussiane)
- Funzione di trasferimento:

$$Y(z) = (c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_n z^{-n}) W(z)$$

$$G(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_n z^{-n} = \frac{c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n}{z^n}$$

  - $n$ zeri (radici del numeratore)
  - $n$ poli nell'origine $\Rightarrow G(z)$ stabile $\Rightarrow y(t)$ stazionario

# MA($n$): media e autocovarianza

- Media:

$$\mathrm{E}[y(t)] = \sum_{i=0}^{n} c_i \mathrm{E}[w(t-i)] = 0$$

- Autocovarianza:

$$\gamma_{yy}(t) = \begin{cases} (c_0 c_\tau + c_1 c_{\tau+1} + \dots c_{n-\tau} c_n)\sigma^2 & , \quad 0 \leq \tau \leq n \\ 0 & , \quad \tau > n \end{cases}$$

- Ridondanza: se definisco $\tilde{c}_i := \alpha c_i$, $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2/\alpha^2$ e considero

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{c}_i \tilde{w}(t-i), \qquad \tilde{w}(t) \sim \mathrm{WN}(0, \tilde{\sigma}^2)$$

si vede che $\tilde{y}(t)$ è equivalente a $y(t)$ (stessa media e autocovarianza)

*di solito si fissa* $c_0 = 1$

# MA($n$): densità spettrale 1/2

$$\Phi_{yy}(z) = \sigma^2 G(z) G(z^{-1})$$

**Esempio (MA(1)):**
$y(t) = w(t) + cw(t-1), \quad w(t) \sim WN(0, \sigma^2)$

- Autocovarianza:

$$\gamma_{yy}(\tau) = \begin{cases} (1+c^2)\sigma^2 & , \quad \tau = 0 \\ c\sigma^2 & , \quad \tau = 1 \\ 0 & , \quad \tau > 1 \end{cases} .$$

- Funzione di trasferimento: $G(z) = 1 + cz^{-1}$

# MA($n$): densità spettrale 2/2

- Densità spettrale:

$$\begin{aligned}\Phi_{yy}(z) &= \sigma^2 G(z)G(z^{-1}) = \sigma^2(1+cz^{-1})(1+cz^{-1}) \\ &= \sigma^2(cz^{-1}+(1+c^2)+cz)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{yy}(\omega) &= \Phi_{yy}(e^{j\omega}) \\ &= \sigma^2(c(\cos(\omega)-j\sin(\omega))+(1+c^2) \\ &\quad +c(\cos(\omega)+j\sin(\omega)) \\ &= \sigma^2((1+c^2)+2c\cos(\omega))\end{aligned}$$

# Processo MA($\infty$)

**Definizione:** Processo MA($\infty$):

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i w(t-i), \qquad w(t) \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$$

- **Ipotesi:** $\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 < \infty$
- Pertanto, $\lim_{i\to\infty} c_i = 0 \Rightarrow$ stabilità$\Rightarrow y(t)$ stazionario
- $\mathrm{E}[\mathrm{y(t)}] = 0$
- $\mathrm{Var}[y(t)] = \sigma^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2\right) < \infty$
- $\gamma_{yy}(\tau) = \sigma^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i c_{i+\tau}\right)$

# Processi AR

# Processi AR($n$): definizione

**Definizione:** Autoregressione di ordine $n$

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \ldots + a_n y(t-n) + w(t), \qquad w(t) \sim \mathrm{WN}(0, \sigma$$

- Funzione di trasferimento:

$$(1 - a_1 z^{-1} - \ldots - a_n z^{-n}) Y(z) = W(z)$$

$$G(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - \ldots - a_n z^{-n}} = \frac{z^n}{z^n - a_1 z^{n-1} - \ldots - a_n}$$

  - $n$ poli (radici del denominatore)
  - $n$ zeri nell'origine

# AR($n$): stabilità

- A differenza del caso MA, la soluzione dell'AR non è necessariamene un P.C. stazionario
- Se tutti i poli hanno modulo $< 1$, allora $G(z)$ è stabile e la soluzione $y(t)$ converge ad un P.C. stazionario (ergodico) che prende il nome di *processo AR(n)*
- Il processo AR($n$) è l'unico processo stazionario che soddisfa l'autoregressione di ordine $n$

# AR($n$): media e autocovarianza 1/2

- Media:

$$\mathrm{E}[y(t)] = G(1)\mathrm{E}[w(t)] = 0$$

- Autocovarianza: equazioni di *Yule-Walker*

$$\begin{array}{rcl}
\gamma_{yy}(0)a_1 + \gamma_{yy}(1)a_2 + \ldots + \gamma_{yy}(n-1)a_n & = & \gamma_{yy}(1) \\
\gamma_{yy}(1)a_1 + \gamma_{yy}(0)a_2 + \ldots + \gamma_{yy}(n-2)a_n & = & \gamma_{yy}(2) \\
\vdots & = & \vdots \\
\gamma_{yy}(n-1)a_1 + \gamma_{yy}(n-2)a_2 + \ldots + \gamma_{yy}(0)a_n & = & \gamma_{yy}(n) \\
\gamma_{yy}(1)a_1 + \gamma_{yy}(2)a_2 + \ldots + \gamma_{yy}(n)a_n & = & \gamma_{yy}(0) - \sigma^2
\end{array}$$

$n+1$ *equazioni per* $n+1$ *incognite* $\gamma_{yy}(\tau)$, $\tau = 0, \ldots, n$

# AR($n$): media e autocovarianza 2/2

**Esempio (AR(1)):** $y(t) = ay(t-1) + w(t), \quad w(t) \sim WN(0, \sigma^2)$

$$
\begin{aligned}
y(t)^2 &= ay(t)y(t-1) + y(t)w(t) \\
&= ay(t)y(t-1) + ay(t-1)w(t) + w(t)^2 \\
\gamma_{yy}(0) &= \mathrm{E}[y(t)^2] \\
&= a\mathrm{E}[y(t)y(t-1)] + a\mathrm{E}[y(t-1)w(t)] + \mathrm{E}[w(t)^2] \\
&= a\gamma_{yy}(1) + \sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t)y(t+\tau) &= ay(t)y(t+\tau-1) + y(t)w(t+\tau) \\
\gamma_{yy}(\tau) &= \mathrm{E}[y(t)y(t+\tau)] = a\gamma_{yy}(\tau-1) \\
&= a^\tau \gamma_{yy}(0)
\end{aligned}
$$

# AR($n$): densità spettrale 1/2

$$\Phi_{yy}(z) = \sigma^2 G(z) G(z^{-1})$$

**Esempio (AR(1)):** $y(t) = ay(t-1) + w(t), \quad w(t) \sim WN(0, \sigma^2)$

- Funzione di trasferimento: $G(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$
- Densità spettrale in $z$:

$$\begin{aligned}\Phi_{yy}(z) &= \sigma^2 G(z) G(z^{-1}) = \sigma^2 \frac{1}{(1-az^{-1})(1-az)} \\ &= \sigma^2 \frac{1}{(1+a^2 - a(z+z^{-1}))}\end{aligned}$$

# AR($n$): densità spettrale 1/2

- Densità spettrale in $\omega$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{yy}(\omega) &= \Phi_{yy}(e^{j\omega}) \\
&= \frac{\sigma^2}{1 + a^2 - a(\cos(\omega) + j\sin(\omega) + \cos(\omega) - j\sin(\omega))} \\
&= \frac{\sigma^2}{1 + a^2 - 2a\cos(\omega)}
\end{aligned}$$

# Processi ARMA

# Processi ARMA($n_a$, $n_c$): definizione

**Definizione:** AutoRegressive Moving Average di ordine ($n_a$, $n_c$)

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \ldots + a_{n_a} y(t-n_a) \\ &+ w(t) + c_1 w(t-1) + \ldots + c_{n_c} w(t-n_c), \quad w(t) \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

# Processi ARMA: funzione di trasferimento

- Funzione di trasferimento:

$$(1-a_1z^{-1}+\ldots+a_{n_a}z^{-n_a})Y(z) = (1+c_1z^{-1}+\ldots+c_{n_c}z^{-n_c})W(z)$$

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1+c_1z^{-1}+\ldots+c_{n_c}z^{-n_c}}{1-a_1z^{-1}-\ldots-a_{n_a}z^{-n_a}} \\ &= \frac{z^{n_a-n_c}(z^{n_c}+c_1z^{n_c-1}+\ldots+c_{n_c})}{z^{n_a}-a_1z^{n-1}-\ldots-a_{n_a}} \end{aligned}$$

- $n$ poli (radici del denominatore)
- $n$ zeri nell'origine
- $n_a > n_c \Rightarrow n_a - n_c$ zeri nell'origine
- $n_a < n_c \Rightarrow n_c - n_a$ poli nell'origine

# ARMA: stabilità

- La soluzione dell'ARMA non è necessariamene un P.C. stazionario
- Se tutti i poli hanno modulo $< 1$, allora $G(z)$ è stabile e la soluzione $y(t)$ converge ad un P.C. stazionario (ergodico) che prende il nome di *processo ARMA($n_a$, $n_c$)*
- Il processo ARMA($n_a$, $n_c$) è l'unico processo stazionario che soddisfa l'autoregressione a media mobile ARMA($n_a$, $n_c$).

# Processi ARMAX

# Processi ARMAX($n_a$, $n_b$, $n_c$, $k$): definizione

**Definizione:** AutoRegressive Moving Average eXogenous di ordine ($n_a$, $n_b$, $n_c$, $k$)

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \ldots + a_{n_a} y(t-n_a) \\ &+ b_0 u(t-k) + b_1 u(t-k-1) + \ldots + b_{n_b} w(t-k-n_b) \\ &+ w(t) + c_1 w(t-1) + \ldots + c_{n_c} w(t-n_c) \end{aligned}$$

- $w(t) \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$
- $u(t)$ ingresso deterministico esogeno

# Processi ARMAX: funzioni di trasferimento

$$Y(z) = G(z)U(z) + H(z)W(z)$$

- $G(z) = \frac{z^{-k}B(z)}{A(z)}$
- $H(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$
- $A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - \ldots - a_{n_a} z^{-n_a}$
- $B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{n_b} z^{-n_b}$
- $C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_{n_c} z^{-n_c}$