Predizione ottima

G. De Nicolao (Università di Pavia)

January 21, 2011

Fattorizzazione spettrale canonica

Fattore spettrale

- **Definizione:** Dato un P.C. $y(t)$ a spettro razionale, la coppia $(G(z), \sigma^2)$ è un fattore spettrale se

$$\Phi_{yy}(z) = \sigma^2 G(z) G(z^{-1})$$

- **Ridondanza:** Un P.C. $y(t)$ a spettro razionale ammette infiniti fattori spettrali. Quale scegliere?

Teorema della fattorizzazione spettrale

Teorema: Dato un P.C. $y(t)$ a spettro razionale, la cui $\Phi_{yy}(z)$ non ha poli con modulo unitario, $\exists$ un unico fattore spettrale $(\hat{G}(z), \hat{\sigma}^2)$, detto *fattore spettrale canonico*, tale che

- Numeratore $N_{\hat{G}}(z)$ e denominatore $D_{\hat{G}}(z)$ sono
  - *coprimi* (nessuna radice in comune)
  - *monici* (il coeff. della potenza di grado max è $= 1$)
  - *di ugual grado*
- Gli zeri di $N_{\hat{G}}(z)$ hanno modulo ≤ 1.
- I poli di $N_{\hat{G}}(z)$ hanno modulo < 1.

Fattorizzazione spettrale: esempio

Definizione: $T(z)$ è un filtro *passatutto* se $T(z)T(z^{-1}) = 1$

Esempio: $G(z) = \frac{10(z+2)}{(z+0.3)(z+0.1)}, \sigma^2 = 1$. Ricaviamo il fattore spettrale canonico mediante operazioni che non alterano $\Phi_{yy}(z)$.

- Aggiungo uno zero nell'origine:

$$G(z) = \frac{10z(z+2)}{(z+0.3)(z+0.1)}, \sigma^2 = 1$$

- Moltiplico per un filtro *passatutto* $T(z) = 2\frac{(z+0.5)}{(z+2)}$:

$$G(z) = \frac{20z(z+0.5)}{(z+0.3)(z+0.1)}, \sigma^2 = 1$$

- Divido la f.d.t. per 20 e moltiplico la varianza per 20^2:

$$\hat{G}(z) = \frac{z(z+0.5)}{(z+0.3)(z+0.1)}, \hat{\sigma}^2 = 400$$

Predizione ottima

Predizione ottima ad un passo 1/3

$$Y(z) = G(z)U(z) + H(z)W(z), \qquad w(t) \sim WN(0, \sigma^2)$$

Ipotesi:

- $G(z)$ strettamente propria (grado di $N_G(z) <$ grado di $D_G(z)$)
- $H(z)$ canonica

Definizione: La predizione ottima ad un passo $\hat{y}(t|t-1)$ è la predizione lineare di $y(t)$, basata su y e u fino al tempo $t-1$, che minimizza $\mathrm{E}[(\hat{y}(t|t-1) - y(t))^2]$

Nel seguito: $\hat{Y}(z) := Z[\hat{y}(t|t-1)]$

Predizione ottima ad un passo 2/3

Teorema:

- Nel dominio delle trasformate, il predittore ottimo ad un passo è dato da:

$$\hat{Y}(z) = \left[1 - \frac{1}{H(z)}\right] Y(z) + \frac{G(z)}{H(z)} U(z)$$

- La varianza dell'errore di predizione è σ^2

Predizione ottima ad un passo 3/3

Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
Y(z) + \frac{Y(z)}{H(z)} &= Y(z) + \frac{G(z)}{H(z)}U(z) + W(z) \\
Y(z) &= \left[1 - \frac{1}{H(z)}\right] Y(z) + \frac{G(z)}{H(z)}U(z) + W(z)
\end{aligned}
$$

- Si vede che $1/H(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \ldots$ (applico la divisione di polinomi)
- $y(t) = -\alpha_1 y(t-1) - \alpha_2 y(t-2) - \ldots + f(u(t-1), \ldots) + w(t)$
- Dato che $w(t)$ è impredicibile, ne segue che

$$\hat{y}(t|t-1) = -\alpha_1 y(t-1) - \alpha_2 y(t-2) - \ldots + f(u(t-1), u(t-2), \ldots)$$

Predizione di modelli ARMAX

- $G(z) = \frac{z^{-k}B(z)}{A(z)} \qquad H(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$
- **Predittore ottimo:**

$$
\begin{aligned}
C(z)\hat{Y}(z) &= [C(z) - A(z)]Y(z) + z^{-k}B(z)U(z) \\
\hat{y}(t|t-1) &= -\sum_{i=1}^{n_c} c_i \hat{y}(t-i|t-i-1) \\
&+ \sum_{i=1}^{\max(n_a,n_c)} (c_i + a_i)y(t-i) \\
&+ \sum_{i=0}^{n_b} b_i u(t-k-i)
\end{aligned}
$$

Predizione di modelli ARX

- $G(z) = \frac{z^{-k}B(z)}{A(z)} \qquad H(z) = \frac{1}{A(z)}$

- **Predittore ottimo:**

$$\begin{aligned} \hat{Y}(z) &= [1 - A(z)]Y(z) + z^{-k}B(z)U(z) \\ \hat{y}(t|t-1) &= \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(t-i) + \sum_{i=0}^{n_b} b_i u(t-k-i) \end{aligned}$$