Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati **6/5/1993**

3. Siano date due V.C. X e Y, di cui è supposta nota la ddp congiunta. Sia $\hat{X}(Y)$ uno stimatore di X basato sull'osservazione di Y. Ci si prefigge di minimizzare la varianza dell'errore di stima, vale a dire $E[(\hat{X}-X)^2]$.

3.a Ricavare lo stimatore ottimo nella classe degli stimatori del tipo $\hat{X} = \alpha Y$.

3.b Ricavare lo stimatore ottimo nella classe degli stimatori del tipo $\hat{X} = \alpha Y + \beta$.

5. Sono state rilevate sperimentalmente le seguenti tre coppie di punti (x(i),y(i)):

x :	-2	-1	1
y:	-6	-2	1

5.a Supponendo che i dati y(i) siano affetti da errori di misura gaussiani i.i.d. a valor atteso nullo e varianza σ^2 (nota), si calcoli la stima ML del parametro θ del modello $y = \theta x^3$.

5.b Si spieghi come si può calcolare un intervallo fiduciario al 90% per il parametro stimato al punto precedente.

6. Si supponga che la durata X delle telefonate urbane sia una V.C. distribuita in modo esponenziale (d.d.p.: $\lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$).

6.a Sapendo che, su un campione di n telefonate, k telefonate sono durate più di T minuti, ricavare la stima a massima verosimiglianza di λ.

6.b Ricavare la stima a massima verosimiglianza della durata media delle telefonate

7. Date le V.C. X e Y si calcoli il valore più probabile di Y sapendo che X+Y = 1, nei casi in cui

7.a X e Y siano gaussiane indipendenti con valor atteso nullo e varianza rispettivamente 1 e 2.

7.b X e Y siano indipendenti e distribuite entrambe con ddp a triangolo tra -1 e 1.

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati **19/5/1994**

5. Si consideri la regressione lineare

$$y_k = \theta u_k + v_k$$

in cui gli errori $v_k \sim G(0,\sigma^2)$ sono i.i.d. con σ^2 incognita. Si supponga di disporre delle seguenti rilevazioni:

u:	-1	0	2	3
y:	-3	1	1	3

5.a Calcolare θ^{ML}.

5.b Calcolare una stima non polarizzata della varianza del disturbo v_k .

5.c Calcolare la stima della varianza di θ^{ML}.

5.d Calcolare l'intervallo di confidenza al 95% per θ.

6. Siano V_k, k= 1, 2, …, N, delle V.C. i.i.d. in modo uniforme nell'intervallo $[-\alpha,\alpha]$.

Supponendo di avere a disposizione i valori V_k, k= 1, 2, …, N, si ricavi la stima a massima verosimiglianza di α.

2. Si supponga di conoscere i valori assunti da N variabili casuali X_k, $k = 1,\dots,N$, i.i.d. e gaussiane con $X_k \sim G(m,\sigma^2)$. Dimostrare che la media campionaria coincide con lo stimatore a massima verosimiglianza

3. Si consideri un modello $Y = \Phi(\theta) + V$, $V \sim G(0,\sigma^2 I)$. Scrivere l'espressione (senza ricavarla) del passo di aggiornamento dell'algoritmo iterativo di Gauss-Newton che fornisce θ^{k+1} a partire da θ^k, specificando il significato dei simboli utilizzati.

5. Si consideri il modello $y_k = \ln(\theta t_k) + v_k$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$, $V \sim G(0,\sigma^2 I)$.

5.a Si supponga che $\theta^{ML} = 1$ e che i residui siano $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = -0.2$, $\varepsilon_1 = -0.3$. Calcolare una stima non polarizzata di σ^2.

5.b Calcolare la varianza del parametro stimato.

5.c Si osservi che, trascurando l'errore v_k, risulta $\exp(y_k) \cong \theta t_k$. Allora, un modo semplice per ottenere una stima di θ consiste nel risolvere il seguente problema di regressione lineare:

$$\hat{\theta} = \arg\min \sum_{k=1}^{3} (\exp(y_k) - \theta t_k)^2$$

Ricavare l'espressione di $\hat{\theta}$ in funzione di y_k.

3. Si consideri la regressione lineare

$$y_k = \theta u_k + v_k$$

in cui gli errori $v_k \sim G(0,1)$ sono i.i.d.. Si supponga di disporre delle seguenti rilevazioni:

u:	-1	0	2	3
y:	0	0	1	2

Calcolare θ^{ML}.

4. Si supponga di dover identificare il seguente modello nonlineare

$$y(t_k) = \exp(-\theta_1 t_k) \sin(\theta_2 t_k) + v(k) ,$$

dove v(k) rappresenta l'errore di misura. Ricavare l'espressione della matrice di sensitività quando le osservazioni vengono prelevate agli istanti $t_1, t_2, \ldots, t_N$.

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati 22/7/2003

1. Sia considerino delle osservazioni X_k , $k = 1,\ldots,N$, V.C. indipendenti e gaussiane, con $E[X_k] = m$.

1.a Sotto l'ipotesi che $Var[X_k] = \sigma^2$, ricavare lo stimatore a massima verosimiglianza di m.

1.b Sotto l'ipotesi che $Var[X_k] = \sigma_k^2$, ricavare lo stimatore a massima verosimiglianza di m.

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati 7/11/2003

3.a Con riferimento alla stima a posteriori, dare la definizione di: stima MAP, stima di Bayes, stima MS lineare.

3.b Si consideri una moneta e si indichi con θ la probabilità (incognita) che esca Testa. Facendo ricorso alla stima a posteriori, tale incognita è descritta come una V.C. In particolare, si faccia l'ipotesi che la ddp a priori per θ sia uniforme in [0,1]. Viene lanciata una volta la moneta ed esce Testa.
Calcolare la ddp a posteriori di θ e determinare la stima MAP e di Bayes.