Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati LS 28/11/2003

1. Si consideri un modello $Y = \Phi(\theta) + V$, $V \sim N(0,\sigma^2 I)$.

1.a Scrivere l'espressione dell'elemento (i,j) della matrice di sensitività.

1.b Ricavare l'espressione del passo di aggiornamento dell'algoritmo iterativo di Gauss-Newton che fornisce θ^{k+1} a partire da θ^k.

2. Si supponga che i seguenti dati

$x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 2$
$Y_1 = 3$ $Y_2 = -2$ $Y_3 = 0.5$

siano generati dal modello

$Y_k = \theta° x_k + V_k$, $k = 1, \dots, 4$, $V \sim N(0,\sigma^2 I)$, σ^2 nota

Una volta calcolata la stima θ^{ML} basata sui dati (x_k, Y_k), $k=1,\dots,3$, essa viene usata per predire il valore di Y_4 sapendo che $x_4 = 6$:

$\hat{Y}_4 := 6\ \theta^{ML}$

A tale proposito, si definisca anche $\varepsilon_4 := Y_4 - \hat{Y}_4$.

2.a Ricavare $\mathrm{Var}[\theta^{ML}]$.

$\mathbf{\Phi = [\ 0 \quad 1 \quad 2\ ]'}$

$$\mathbf{Var}[\theta^{ML}] = \sigma^2(\Phi'\Phi)^{-1} = \frac{\sigma^2}{5}$$

2.b Spiegare perché la ddp di ε_4 è gaussiana.

Dato che θ^{ML} è gaussiana, anche $\hat{Y}_4$ è gaussiana. Dato che $\hat{Y}_4$ e Y_4 sono gaussiane e indipendenti (Y_4 dipende solo da V_4, mentre $\hat{Y}_4$ dipende da V_1, V_2, V_3), la loro differenza è gaussiana.

2.c Ricavare $E[\varepsilon_4]$

Ricordando che $E[\theta° - \theta^{ML}] = 0$ perché θ^{ML} è uno stimatore non polarizzato:

$$E[\varepsilon_4] = E[Y_4 - \hat{Y}_4] = E[6\theta° - 6\theta^{ML}] = 6\, E[\theta° - \theta^{ML}] = 0$$

2.d Ricavare $\mathrm{Var}[\varepsilon_4]$

Osservando che $\hat{Y}_4$ e Y_4 sono indipendenti:

$$\mathrm{Var}[\varepsilon_4] = \mathrm{Var}[Y_4 - \hat{Y}_4] = \mathrm{Var}[Y_4] + \mathrm{Var}[\hat{Y}_4] = \sigma^2 + 36\,\mathrm{Var}[\theta^{ML}] = \frac{41}{5}\sigma^2$$

3. Si considerino le V.C. Y_i, i = 1,…, N, i.i.d., ciascuna delle quali ha ddp esponenziale con $E[Y_i] = 1/\Theta$. In funzione del vettore Y dei dati, ricavare la formula della stima MAP del parametro Θ, supponendo che la ddp a priori sia $f_\Theta(\theta) = \lambda\exp(-\lambda\theta)$, $\theta \geq 0$, $f_\Theta(\theta) = 0$, $\theta < 0$, dove λ è un parametro noto.

$$f_{\Theta|Y}(\theta|Y) \propto f_{Y|\Theta}(Y|\theta)\, f_\Theta(\theta) = \lambda \exp(-\lambda\theta) \prod_{i=1}^{N} \theta \exp(-\theta Y_i)$$

Indicando con K una costante che non dipende da θ:

$$\ln f_{\Theta|Y}(\theta|Y) = K - \theta\,(\lambda + \sum_{i=1}^{N} Y_i) + N \ln\theta$$

Imponendo che la derivata rispetto a θ sia nulla, si trova che

$$\theta^{MAP} = \frac{N}{\lambda + \sum_{i=1}^{N} Y_i}$$

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

		V	*F*
1.	Lo stimatore ML è sempre non polarizzato.	❑	■
2.	L'integrale della verosimiglianza $L(\theta)$ esteso sull'insieme dei valori ammissibili per θ è sempre pari a uno.	❑	■
3.	$E[X \mid Y=y]$ è sempre una funzione lineare di y.	❑	■
4.	Se Θ e Y sono congiuntamente gaussiane, allora $f_{\Theta \mid Y}(\theta \mid Y=y)$ è una ddp gaussiana.	■	❑
5.	Se Θ e Y sono congiuntamente gaussiane, risulta sempre $Var[\Theta \mid Y] \le Var[\Theta]$.	■	❑
6.	Sia $Y = \Phi\theta° + V$, con $V \sim N(0,\Sigma_V)$. Allora, $\theta^{ML} \sim N(\theta°,(\Phi'\Phi)^{-1})$.	❑	■
7.	Sia $Y = \Phi\theta° + V$, con $V \sim N(0,\Sigma_V)$ e $\det(\Phi'\Phi) \neq 0$. Allora, θ^{ML} è non polarizzato e a minima varianza.	■	❑
8.	Sia $Y = \Phi\Theta + V$, con $V \sim N(0,\sigma^2\Psi)$, $\Theta \sim N(0,\sigma^2\Omega)$, V e Θ indipendenti. Allora, Θ^B non dipende da σ^2.	■	❑
9.	Sia $Y = \Phi\Theta + V$, con $V \sim N(0,\Sigma_V)$, $\Theta \sim N(0,\Sigma_\Theta)$, V e Θ indipendenti. Allora, Θ^B ha ddp gaussiana.	■	❑
10.	Il modello $y_k = \theta \ln(x_k) + v_k$, $k = 1,\ldots,N$, è lineare nei parametri.	■	❑