PROBABILITA'

GIUSEPPE DE NICOLAO
Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Università di Pavia

SOMMARIO

- Probabilità
- Variabili casuali: distribuzioni, densità, istogrammi
- Media, varianza, momenti
- Distribuzione gaussiana
- Visualizzazione dei dati
- Conclusioni

Bibliografia del corso

Monografie:

D. Freedman, R. Pisani, R. Purves, *Statistica*, MCGraw Hill

D.C. Montgomery, G.C. Runger, *Applied Statistics and Probability for Engineers*, Wiley 2003.

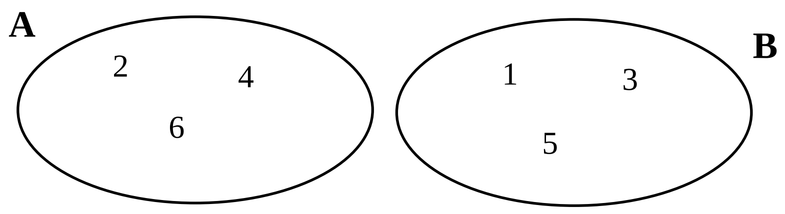
PROBABILITA'

Evento: ciò che può essere oggetto di scommessa

Esempi:
- Lancio una moneta ed esce croce
- Lancio un dado ed esce un numero pari

Eventi disgiunti: A e B sono disgiunti se non possono verificarsi simultaneamente

Esempio: Lancio un dado; A = {pari}, B = {dispari}



Evento certo: si verifica con certezza

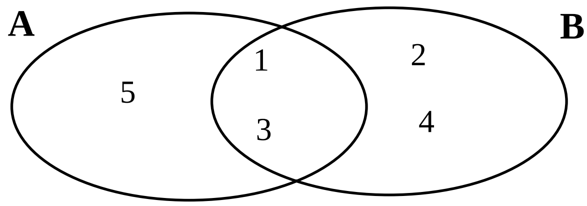
Esempio: Lancio un dado ed esce un numero tra 1 e 6

Unione ("somma") di eventi: C = A+B è l'evento che si verifica se si verifica A oppure B

Esempio: A = {dado dispari}, B = {dado ≤ 4}

$$\Downarrow$$

A+B = {dado ≤ 5}

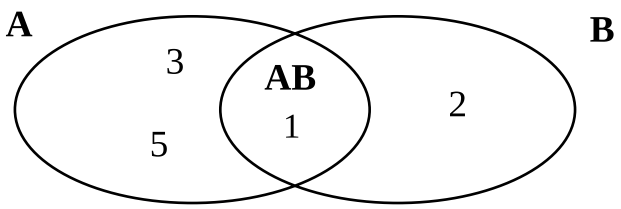


Intersezione ("prodotto") di eventi: C =AB è l'evento che si verifica se si verificano sia A che B

Esempio: A = {dado dispari}, B = {dado ≤ 2}

$$\Downarrow$$

AB = {1}



Evento negato: B = $\overline{A}$ è l'evento che si verifica se e solo se non si verifica A.

Esempio: A = {dado dispari} ⇒ $\overline{A}$ = {dado pari}.

Definizione "assiomatica" di probabilità: Dato un evento A gli associo un numero P(A) (la probabilità di A) che gode delle seguenti proprietà (assiomi)

1) $P(A) \geq 0$
2) P({evento certo}) = 1
3) Se A e B sono eventi disgiunti, P(A+B) = P(A) + P(B)

Osservazione: Dato un insieme di eventi, ci sono infiniti modi di assegnare le probabilità

Esempio: Moneta con P(T) = 0.5

$$P(T+C) = P(\{\text{evento certo}\}) = 1$$
$$P(T+C) = P(T) + P(C)$$
$$\Downarrow$$
$$P(C) = 1 - P(T) = 0.5$$

Però va bene anche:

$$P(T) = p,\ P(C) = 1 - p$$

(al variare di *p* ho tutte le possibili monete truccate)

Il calcolo delle probabilità insegna come maneggiare le probabilità supponendo di conoscerle.
La loro stima è affare della statistica

Corollari:

- $P(A+\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$

- $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

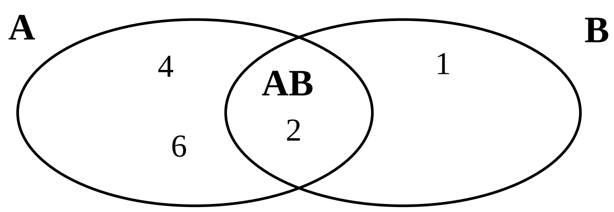
Esempio: Calcolare la probabilità che un dado onesto dia un numero pari o minore di 3

$$A = \{pari\} = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = 1/2$$

$$B = \{dado < 3\} = \{1, 2\} \Rightarrow P(B) = 1/3$$

$$AB = \{2\} \Rightarrow P(AB) = 1/6$$

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 1/2 + 1/3 - 1/6 = 4/6$



Probabilità condizionata: Dati due eventi A ed M con $P(M) \neq 0$, la probabilità di A condizionata da M è

$$P(A|M) := \frac{P(AM)}{P(M)}$$

Esempio: Trovare la probabilità che un dado dia {<4} sapendo che il risultato del lancio è stato pari

$$P(\{<4\}|\{pari\}) = \frac{P(\{1,2,3\},\{pari\})}{P(\{pari\})} = \frac{P(\{2\})}{P(\{pari\})} = 1/3$$

Teorema della probabilità totale: Se M_1, M_2, …,M_n, sono disgiunti e $M_1+M_2+ \dots +M_n$ = {evento certo}, allora

$$P(A) = P(A|M_1)P(M_1)+P(A|M_2)P(M_2)+ \dots +P(A|M_n)P(M_n)$$

Teorema di Bayes:

$$P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)}$$

Esempio: Carta di controllo. M = causa speciale, A = punto fuori dai limiti di controllo.

- Se c'è' una causa speciale la carta segnala un fuori controllo con probabilità 0.5
- In assenza di cause speciali, la probabilità di falso allarme è 0.0027
- La probabilità di una causa speciale è 0.05.

Sapendo che è stato segnalato un fuori controllo, quale è la probabilità che ci sia effettivamente una causa speciale?

Devo calcolare P(M|A)

$$P(M) = 0.05$$

$$P(A|M) = 0.5$$

$$P(A|\overline{M}) = 0.0027$$

$$P(A) = P(A|M)P(M)+P(A|\overline{M})P(\overline{M}) = 0.025+0.00267 = 0.02767$$

(probabilità totale)

$$P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \frac{0.025}{0.02767} = 0.90$$

(Bayes)

Nota: Se $P(A|\overline{M}) = 0.027 \Rightarrow P(M|A) = 0.48$

Indipendenza: Due eventi A e B si dicono indipendenti se

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Osservazione: Se A e B sono indipendenti

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Interpretazione: Sapere se B si è verificato non mi dice nulla sulla probabilità che si verifichi A.

Esempio: Dado; A = {numero > 2}, B = {dispari}. Verificare che A e B sono indipendenti.

$$P(A) = 4/6$$

$$P(B) = 1/2$$

$$P(AB) = P(\{3,5\}) = 2/6 = P(A)P(B)$$

$$\Downarrow$$

A e B sono indipendenti

Osservazione: In molti casi l'indipendenza viene postulata in base a ragioni fisiche. In tal caso, mi permette di calcolare P(AB) (probabilità dell'evento congiunto) in base alla sola conoscenza di P(A) e P(B).

Se non c'é indipendenza, la conoscenza di P(A) e P(B) è insufficiente a determinare P(AB)

Osservazione: Disgiunzione e indipendenza sono due concetti diversi!

Esempio: Dado onesto; A = {pari}, B = {dispari}

- A e B sono disgiunti
- $P(AB) = P(\{\text{evento impossibile}\}) = 0 \neq P(A)P(B)$

VARIABILI CASUALI

Variabile Casuale (V.C.) X: un esperimento casuale il cui esito è un numero reale X

Esempio 1: Lancio di un dado. Possibili esiti: $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Se il dado è "onesto": $P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = P(X=4) = P(X=5) = P(X=6) = 1/6$

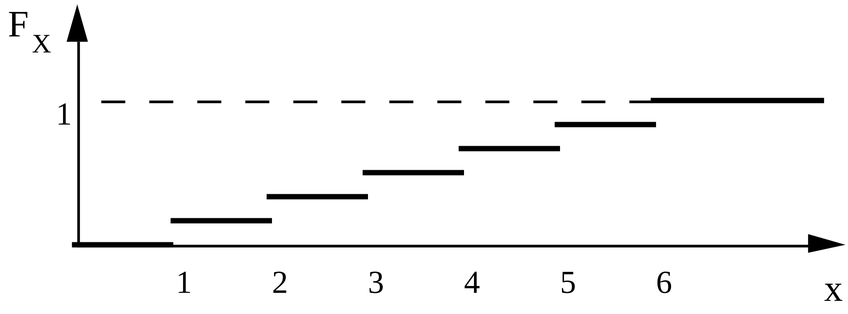
Esempio 2: Fermo per la strada una persona a caso e ne misuro la statura.

Esempio 3: L'errore di misura compiuto da un sensore in una determinata misurazione.

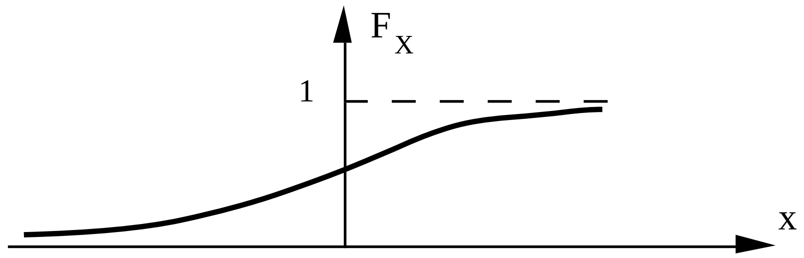
Nota: Nei tre esempi, ripetendo l'esperimento non ho nessuna garanzia di ottenere lo stesso risultato (casualità).

Funzione di distribuzione (f.d.d.): $F_X(x) = P(X \le x)$

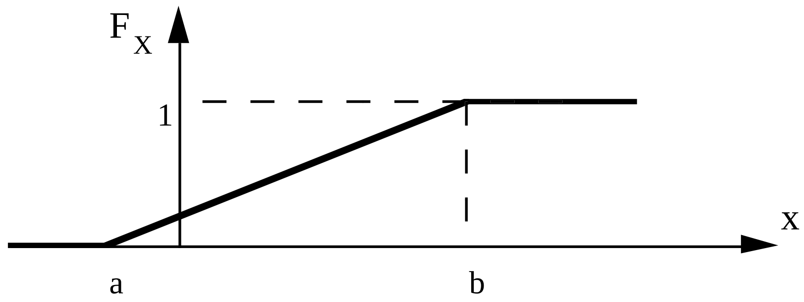
Esempio: Dado onesto



Esempio: Errore commesso da un sensore (analogico)



Esempio: Numero reale $\in [a,b]$ scelto a caso in modo "uniforme"



Alcune proprietà della f.d.d.:

- $F_X(x) \leq 1, \ \forall x$

- $F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(\infty) = 1$

- $F_X(x)$ è monotona non decrescente

- $P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

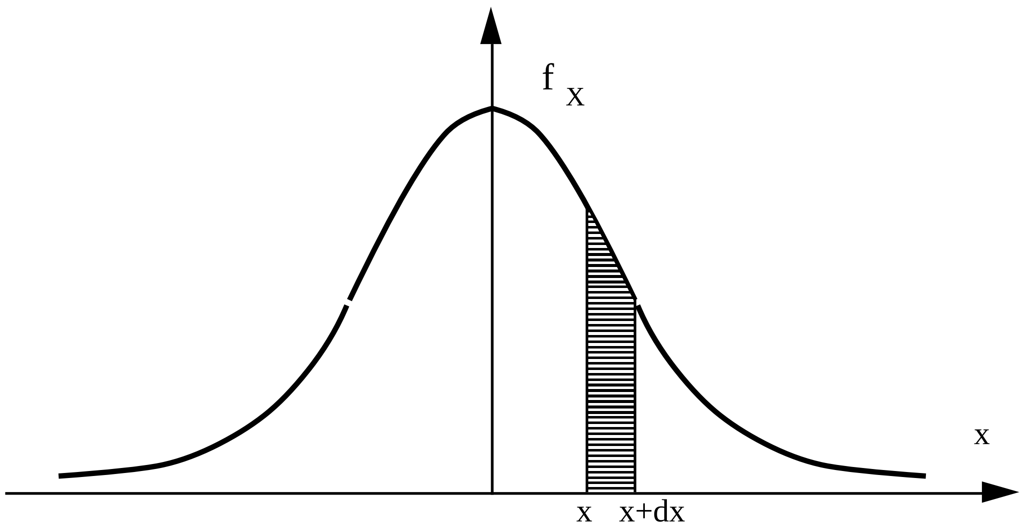
- $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x)$

Per molte V.C. (la gaussiana per esempio), non esiste una formula esplicita per la f.d.d. $\Rightarrow$ tabella.

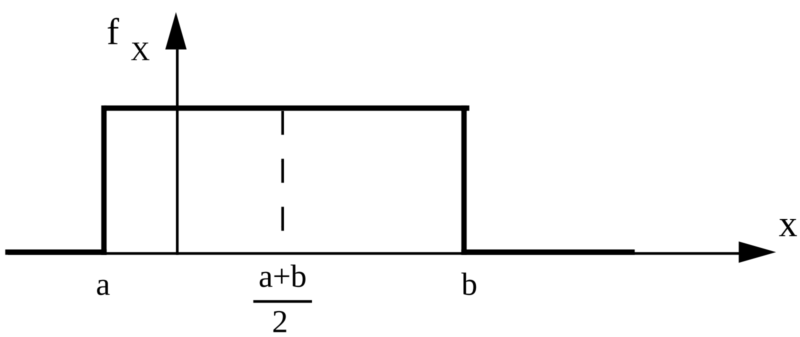
Densità di probabilità (d.d.p.): $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$

Interpretazione: $f_X(x)dx = P(x \le X < x+dx)$

Esempio: Errore di misura



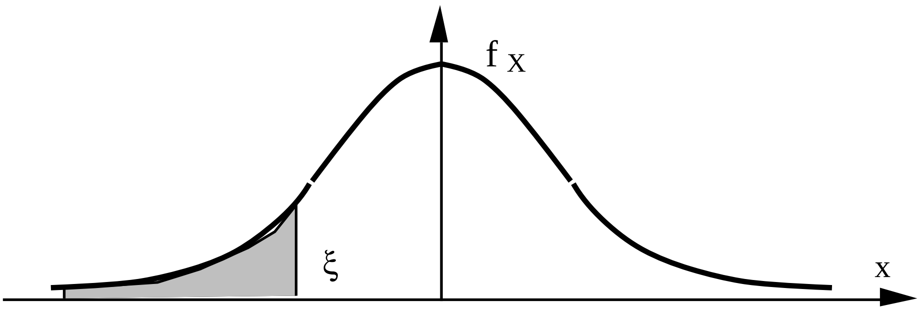
Esempio: V.C. *uniforme*



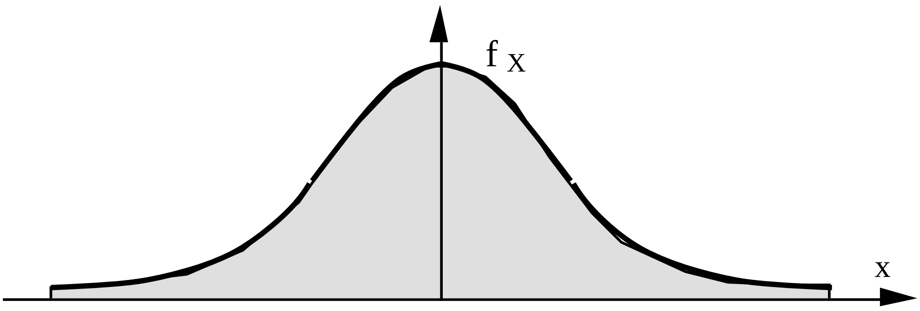
Alcune proprietà della d.d.p.:

- $f_X(x) \geq 0, \ \forall x$ (infatti $F_X(x)$ è monotona)

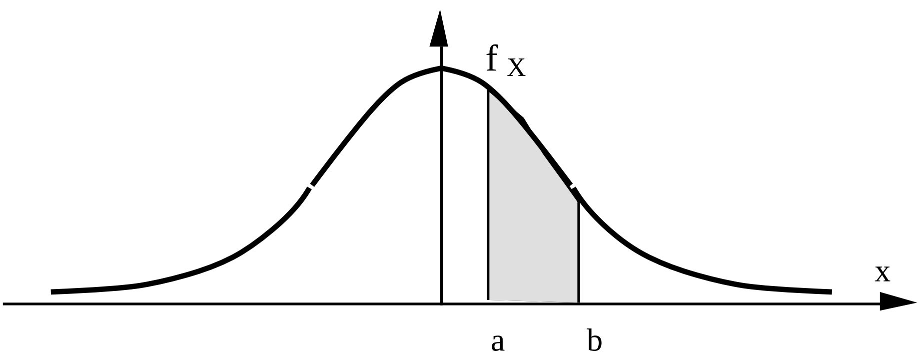
- $P(X \leq \xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f_X(x)dx = F_X(\xi)$



- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = F_X(\infty) = 1$



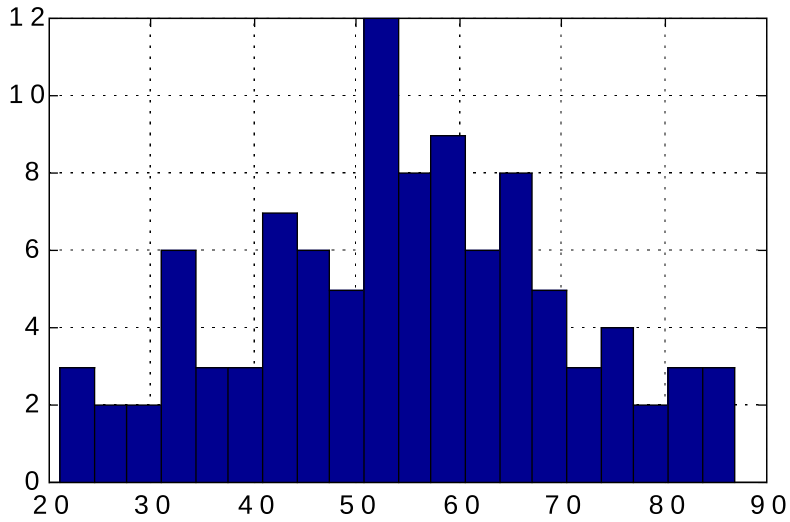
- $P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$



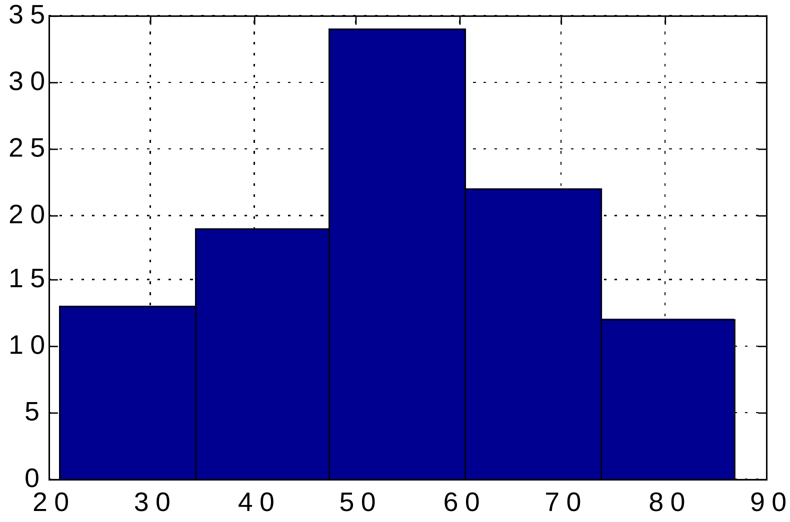
Istogramma: Divido in classi ("bins") e traccio barre proporzionali al numero di dati in ciascuna classe

Problema: scelta del numero di classi

Troppe classi → "bocca sdentata"

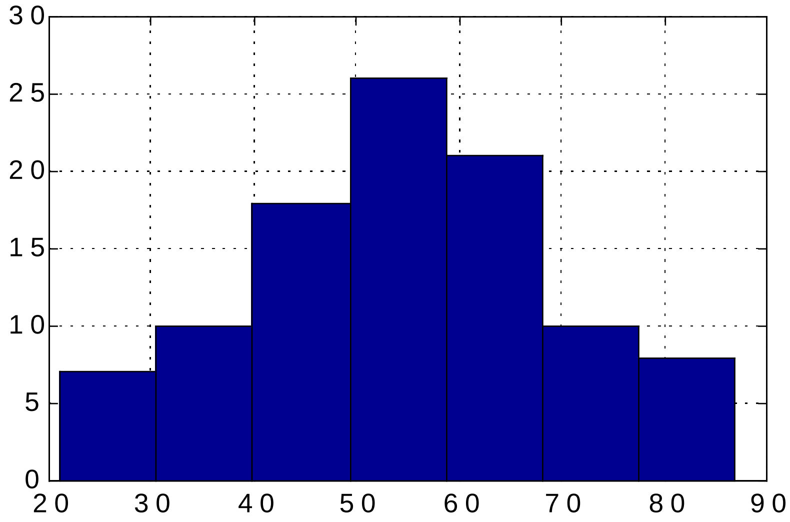


Poche classi → perdita di risoluzione

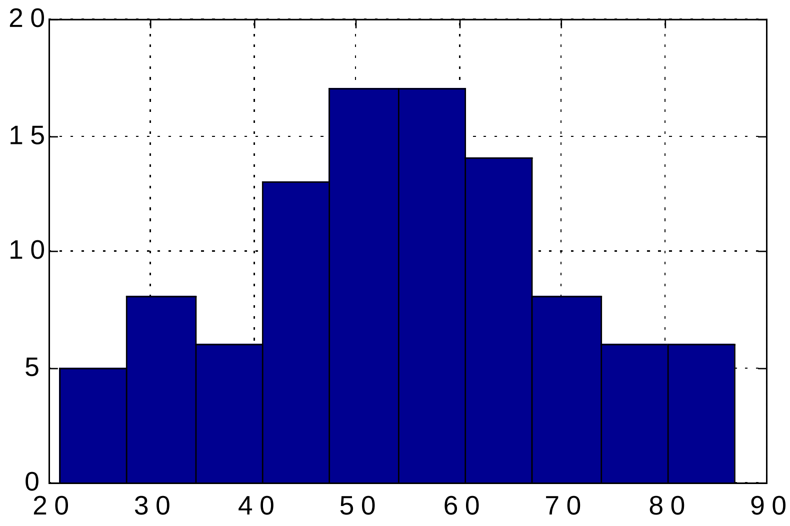


Regola della potenza del 2 ("power-of-2-rule"):
Date n osservazioni, usare a classi con $2^{(a-1)} < n \leq 2^a$

Esempio: $n = 100 \Rightarrow 2^6 < 100 < 2^7 \Rightarrow a = 7$



Altra regola: $a = \sqrt{n}$



MEDIA, VARIANZA, MOMENTI

Media (o valore atteso): $E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx$

Interpretazione: "Baricentro" della d.d.p. $f_X(x)$

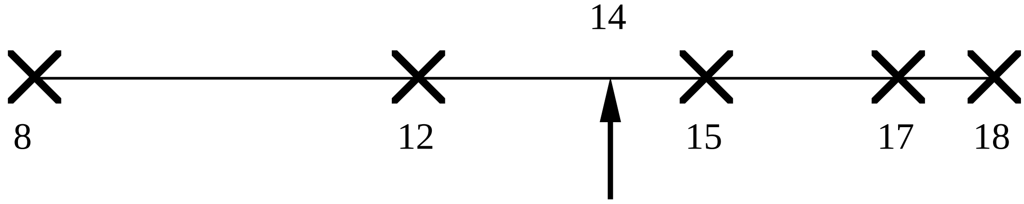
Come si stima?

Dati: 8 12 15 17 18

$$\Downarrow$$

Media campionaria: $$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{8+12+15+17+18}{5} = 14$$

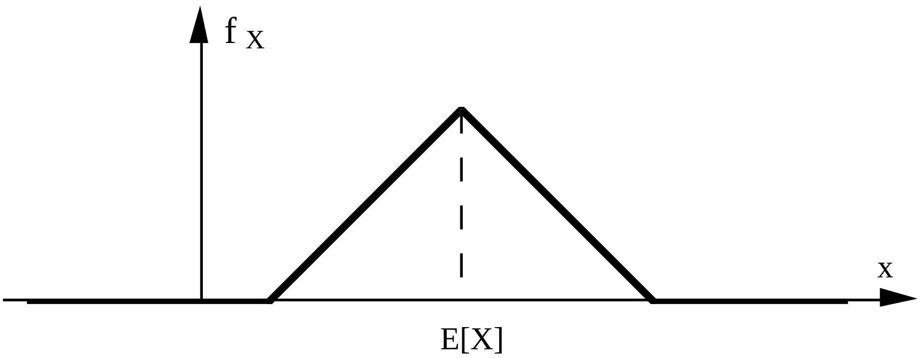


Proprietà:

- d.d.p. simmetrica rispetto a $x = \bar{x}$

$$\Downarrow$$

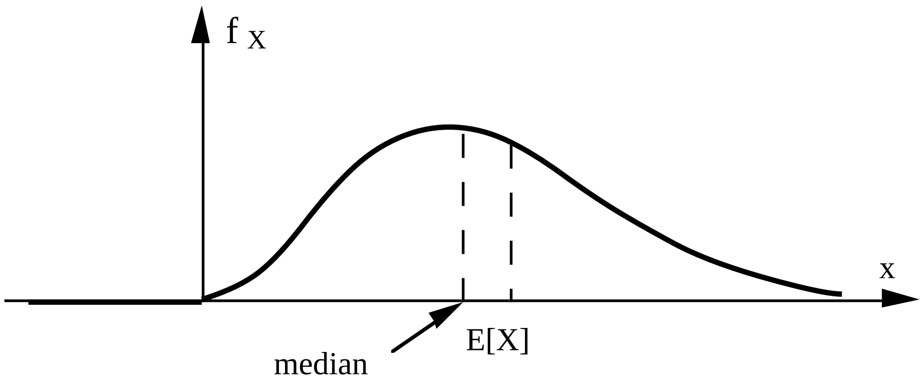
$$E[X] = \bar{x}$$



- $E[\alpha+\beta X] = \alpha + \beta E[X]$ (linearità)

Mediana: M_X tale che $Fx(M_X) = 0.5$

$$P(X > M_X) = P(X < M_X)$$



Come si stima?

Dati: 8 12 15 17 18

$$\Downarrow$$

$$\hat{M}_X = 15$$

Dati: 8 12 15 17 18 21

$$\Downarrow$$

$$\hat{M}_X = \frac{15 + 17}{2} = 16$$

$$\textit{Varianza: } Var[X] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx$$

$$\textit{Deviazione standard: } \sqrt{Var[X]} = \sigma_X$$

Interpretazione: "Momento di inerzia" della d.d.p. $f_X(x)$ attorno al baricentro μ_X.

Come si stima?

Dati: 8 12 15 17 18

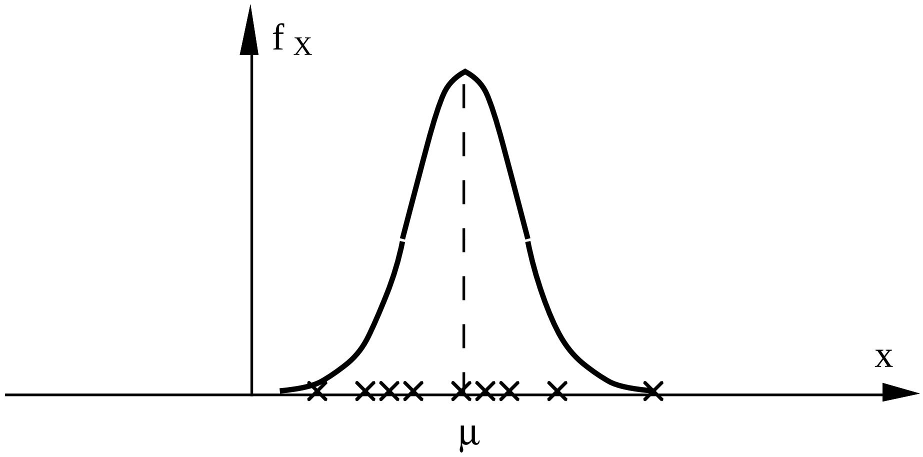
$$\Downarrow$$

$$\textit{Varianza campionaria:} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

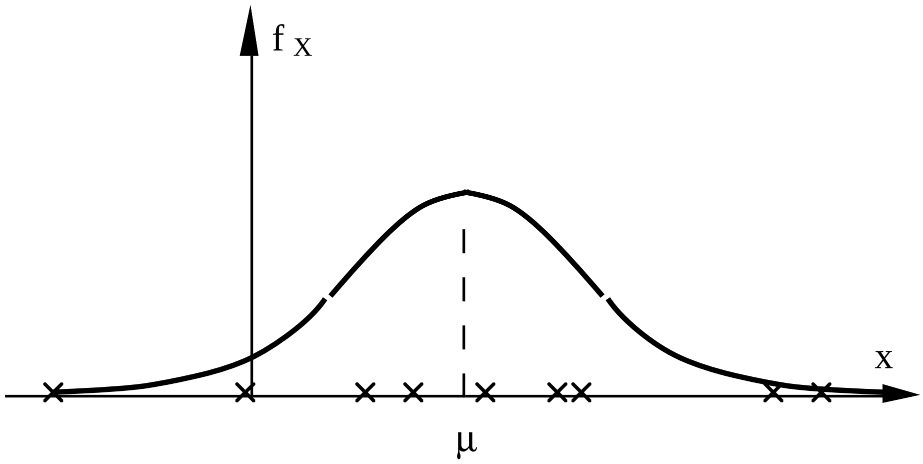
$$S^2 = \frac{(8-\overline{X})^2+(12-\overline{X})^2+(15-\overline{X})^2+(17-\overline{X})^2+(18-\overline{X})^2}{5-1} =$$

$$= \frac{(-6)^2+(-2)^2+(1)^2+(3)^2+(4)^2}{4} = 16.5$$

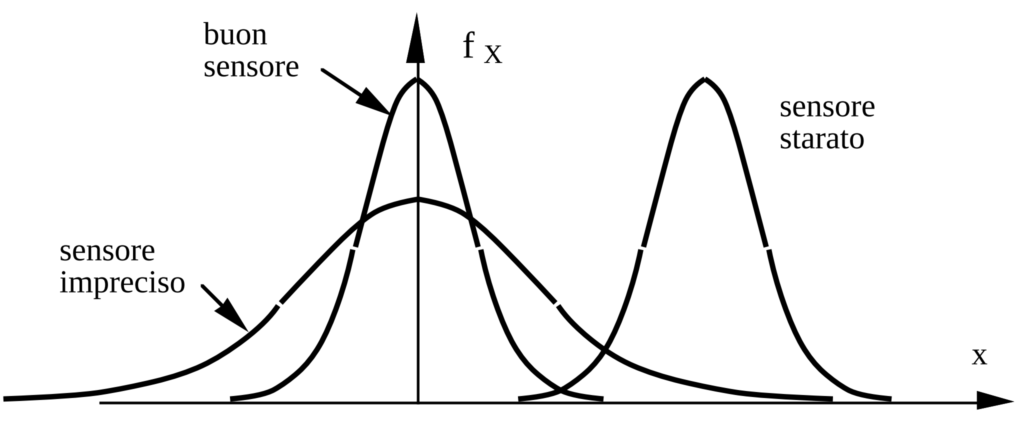
$Var[X]$ "piccola":



$Var[X]$ "grande":



L'errore di misura X di un buon sensore ha $E[X] \cong 0$ e $Var[X]$ "piccola".



Proprietà della varianza:

- $Var[X] = E[(X-\mu_X)^2]$
- $Var[X] = 0 \Rightarrow P(X = E[X]) = 1$
- $Var[\alpha+\beta X] = \beta^2 Var[X]$

Standardizzazione: Data una V.C. X, definiamo

$$Z = \frac{X-E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$$

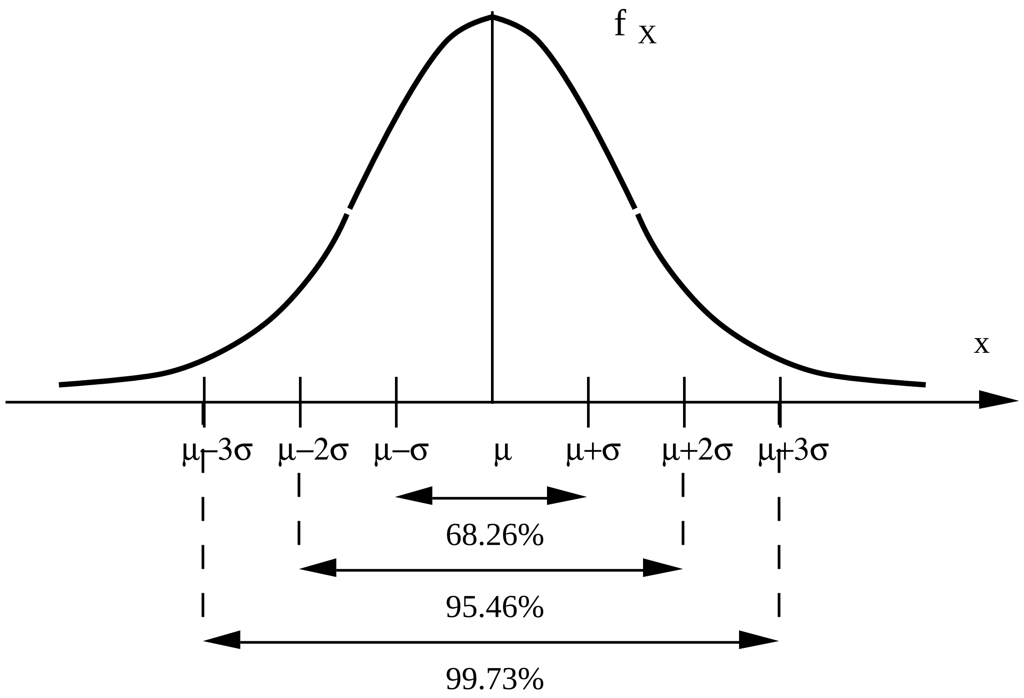
Z è una nuova V.C. con $E[Z] = 0$, $Var[Z] = 1$

Media e varianza della V.C uniforme in $[a,b]$:

- $\mu = \frac{a+b}{2}$ (simmetria)
- $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ (facendo i conti)

DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

d.d.p. gaussiana (normale): $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$



Alcune proprietà:

- $E[X] = \mu$
- $Var[X] = \sigma^2$
- E' completamente caratterizzata da media e varianza
- $Y = \alpha+\beta X$ è ancora gaussiana

Notazione: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

L'uso di Z: Sui libri si trova tabulata la distribuzione della normale standard Z (tale che $E[Z] = 0$, $Var[Z] = 1$).

Tabella: Valori di $F_Z(z) = P(Z \leq z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Esempio: Si consideri uno spessore di ossido $X \sim N(0.625, 0.0001)$, con $USL = 0.65$. Determinare la probabilità che su 100 spessori misurati (supposti indipendenti) ve ne sia almeno uno che supera USL.

1) Determino la probabilità di uno spessore fuori specifica.

Idea chiave: Riformulare tutto in termini di Z

$$\Downarrow$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$\Downarrow$$

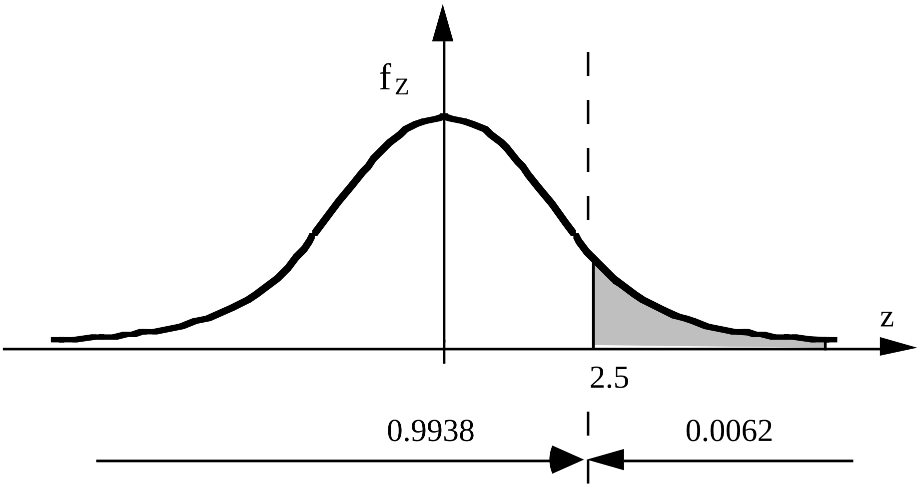
$$\mathrm{P}(X \geq 0.65) = \mathrm{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{0.65-\mu}{\sigma}\right) = \mathrm{P}(Z \geq z)$$

$$z := \frac{0.65-\mu}{\sigma} = 2.5$$

Dalle tabelle: $P(Z \leq 2.5) = 0.9938$

$$\Downarrow$$

$$P(Z \geq 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$



2) P(almeno 1 fuori specifica) = 1 - P(tutti in specifica)

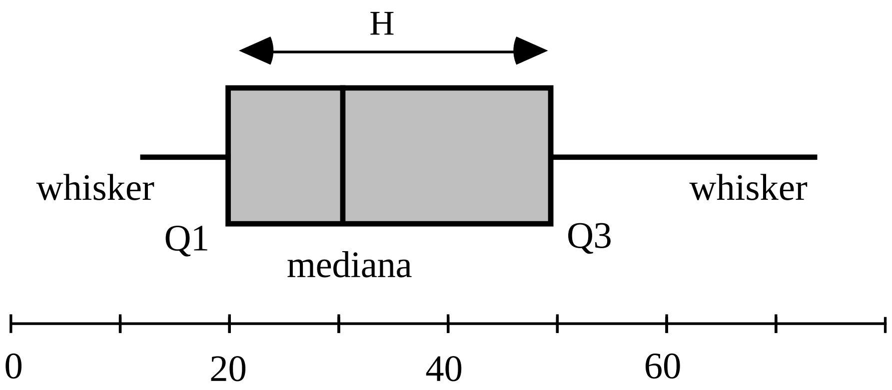
p := P(spess. in spec.) = 1 - P(spess. fuori spec.) = 0.9938

P(tutti in specifica) = $p \times p \times p \ldots \times p = p^{100} = 0.5364$

P(almeno 1 fuori specifica) = 1 - 0.5364 = 0.4636

Il boxplot (box-and-whiskers-plot)

E' una rappresentazione grafica di una distribuzione ottenuta a partire da un set di dati.



Ingredienti (Quantile Boxplot):

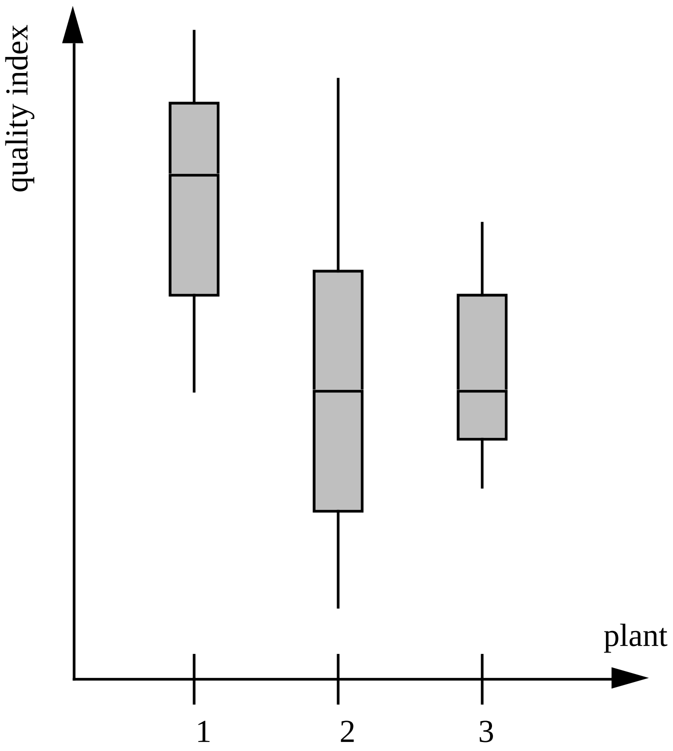
- *Linea centrale* = mediana

- *hinges* (cardini): 1° e 3° quartile (mediane della prima e della seconda metà dei dati); la lunghezza del box è detta *H*-spread: $H = Q3 - Q1$

- *whiskers* (baffi): si estendono fino al minimo e al massimo valore dei dati

Utilità dei boxplot:

- Evidenziano possibili asimmetrie
- Facilitano i confronti



Modified boxplot (Outlier Boxplot):

I baffi si estendono fino ai dati estremi $\in [Q1\text{-}1.5H, Q3+1.5H]$
I dati che cadono fuori sono considerati *outliers*

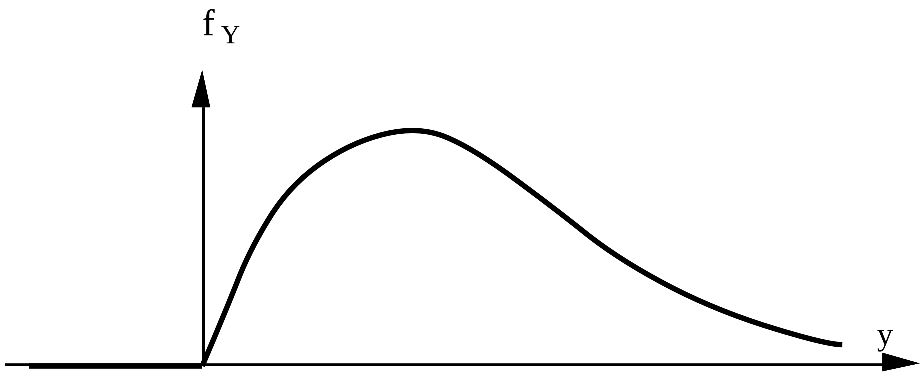
Caso gaussiano:

- mediana = media
- $H = 1.34\sigma$
- limiti degli outliers: $\mu \pm 2.68\sigma$

Distribuzione Lognormale

Data $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, definiamo $Y := e^X$

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Osservazioni:

- $\ln(Y)$ ha distribuzione gaussiana
- $E[Y] \neq e^{E[X]}$
- In generale, $E[g(X)] \neq g(E[X])$;
  eccezione: $E[\alpha+\beta X] = \alpha+\beta E[X]$

Skewness:

$$\beta = \frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}$$

ddp simmetrica rispetto alla media $\Rightarrow \beta = 0$

$$\Downarrow$$

β è un indice di asimmetria

Proprietà: β è invariante rispetto a trasformazioni lineari del tipo $Y = aX+b$.

Kurtosis:

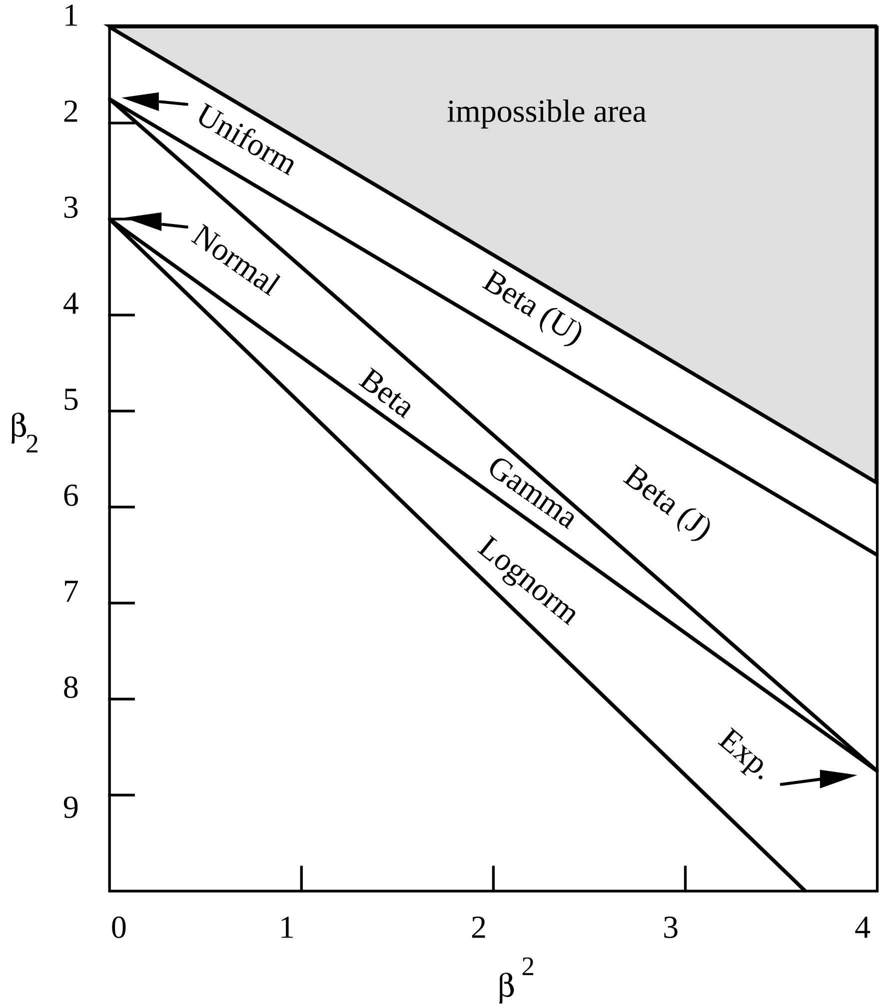
$$\beta_2 = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4}$$

Proprietà:

- Anche β_2 è invariante rispetto a trasformazioni lineari.
- ddp gaussiana $\Rightarrow \beta_2 = 3$
- $\beta_2 < 3 \Rightarrow$ la ddp va a zero più rapidamente della gaussiana
- $\beta_2 > 3 \Rightarrow$ la ddp va a zero più lentamente della gaussiana

Attenzione! Essendo basati su momenti di ordine elevato, β *e* β_2 *sono sensibili agli outlier.*

Skewness e kurtosis per varie distribuzioni



VISUALIZZAZIONE DEI DATI

Dati raccolti sequenzialmente nel tempo possono essere visualizzati in diversi modi:

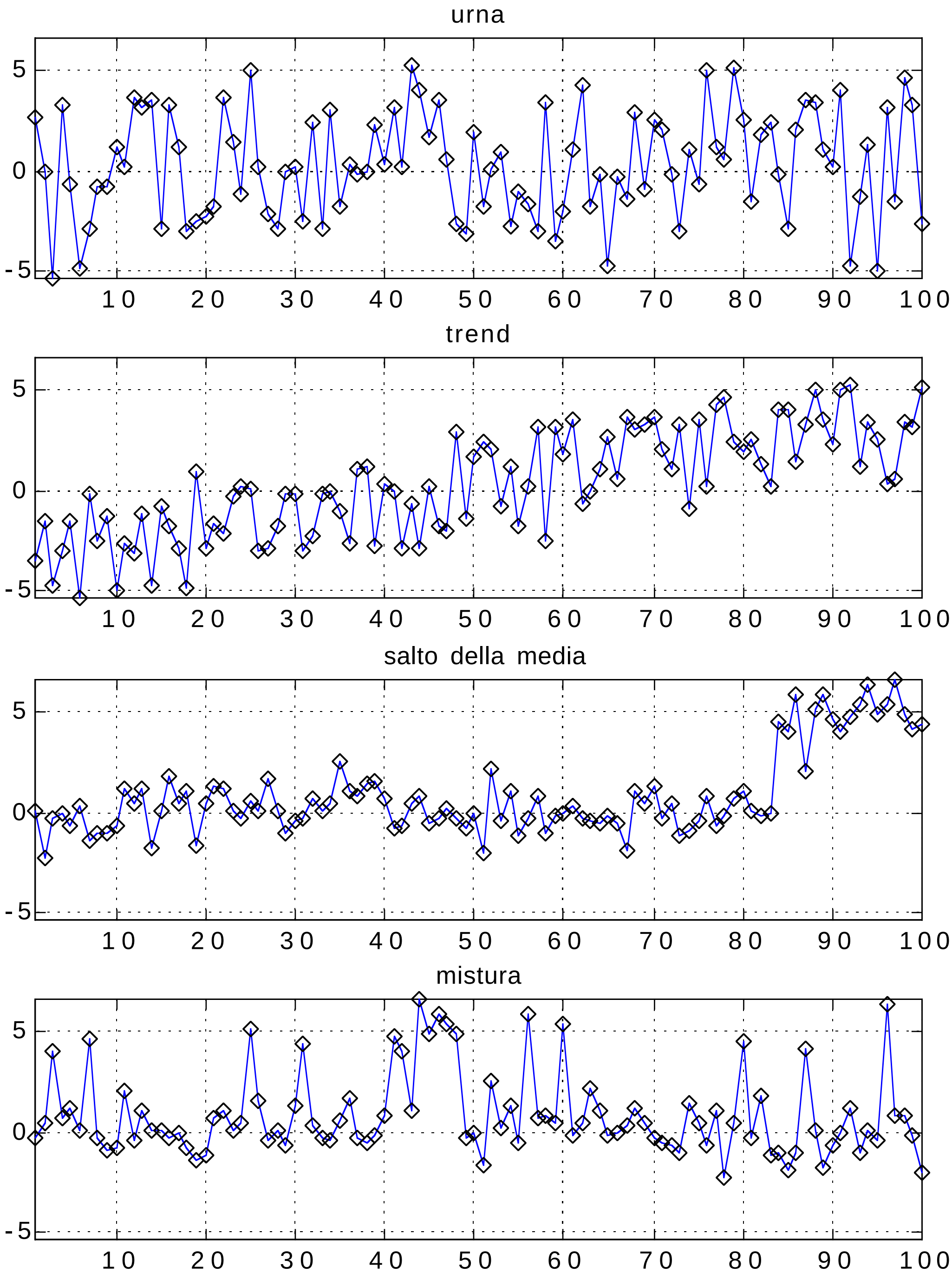
- Serie temporale (control chart di tipo X "individuale")
- Istogramma
- Diagramma di dispersione (scatter plot)
- Boxplot

Attenzione! Le ultime tre rappresentazioni presuppongono che i dati siano interpretabili come risultati di repliche indipendenti dello stesso esperimento (variabilità naturale, "modello dell'urna").

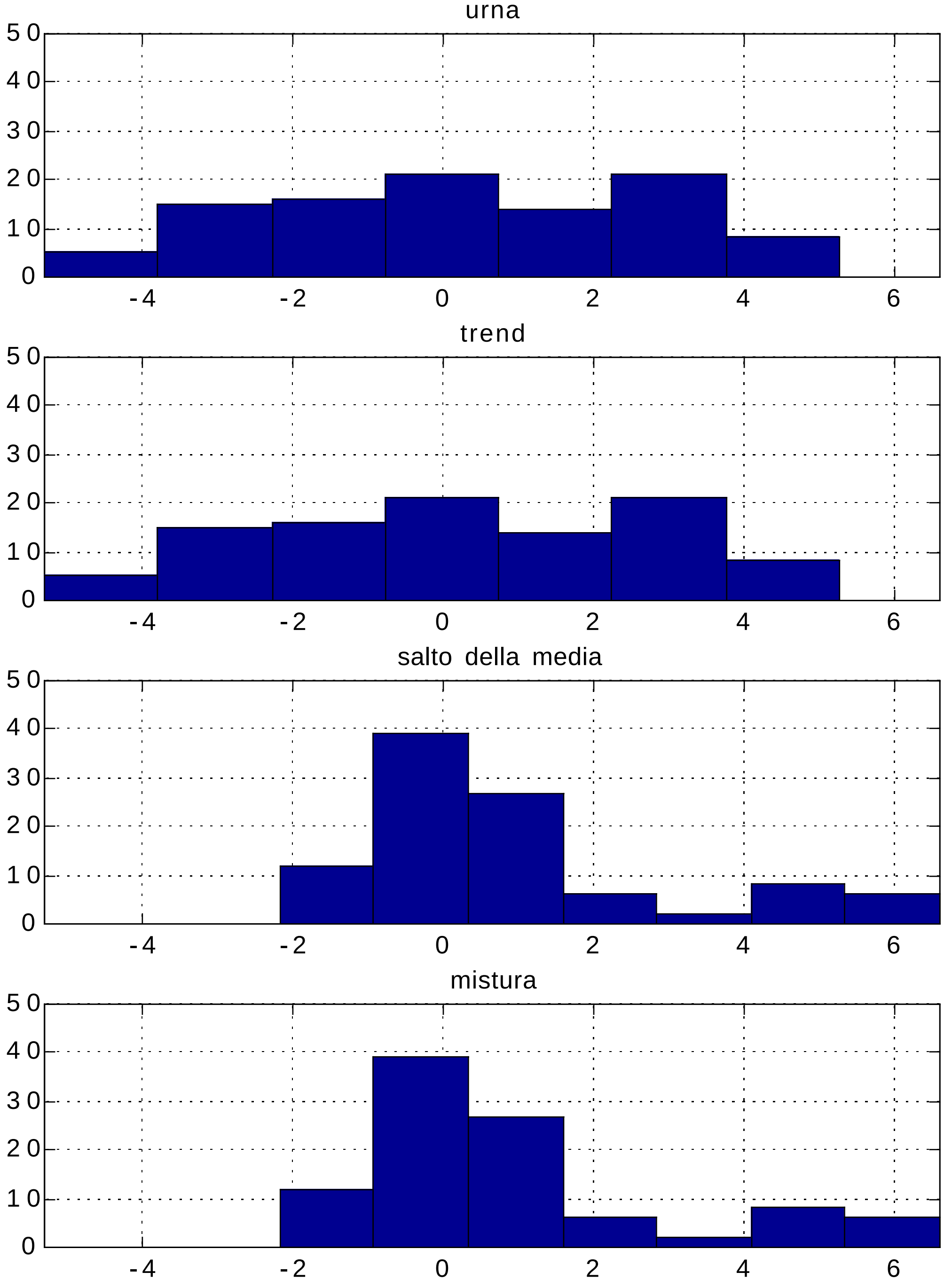
$$\Downarrow$$

E' bene esaminare la serie temporale
per evitare un uso scorretto delle altre rappresentazioni

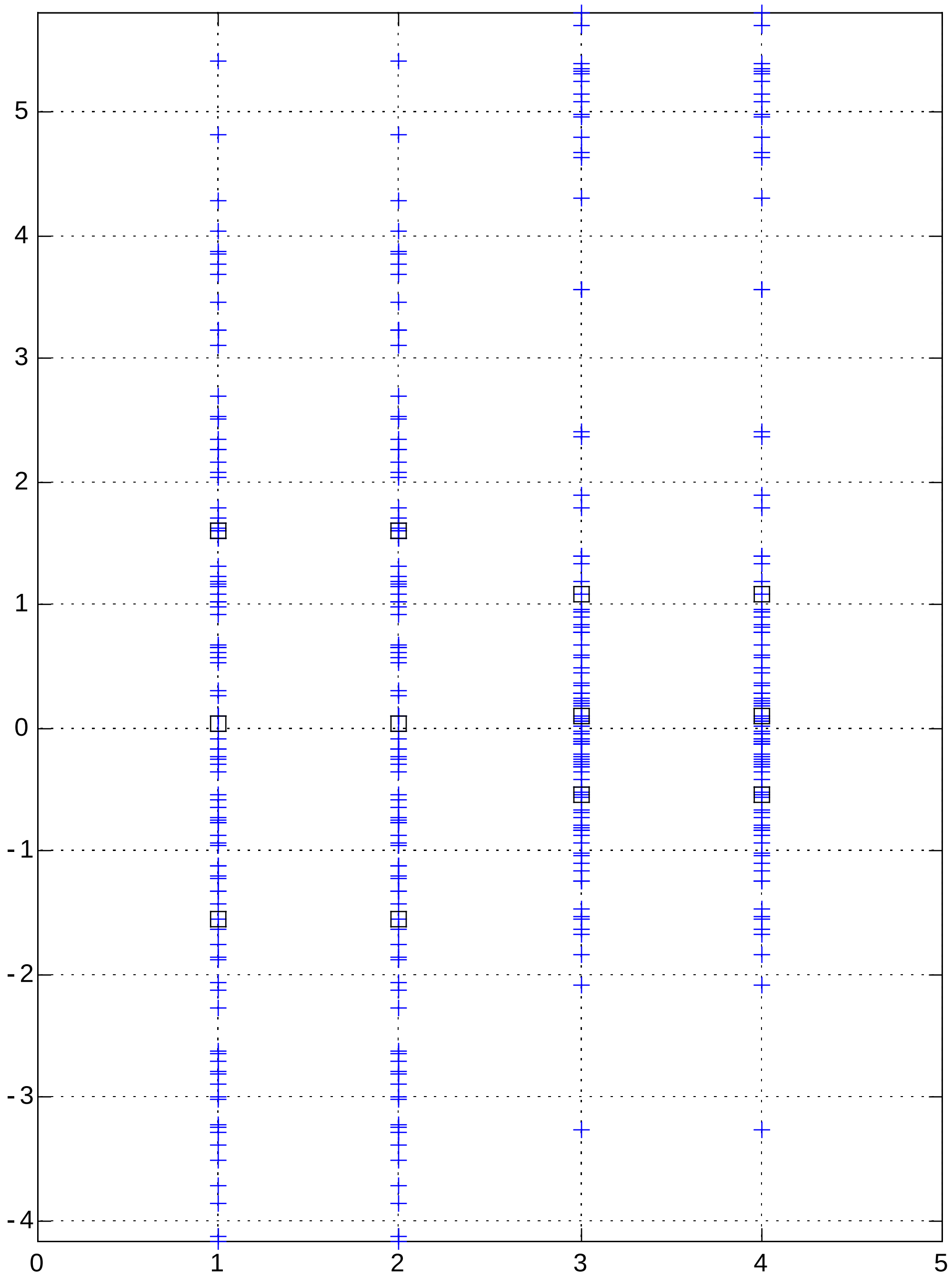
Esempio: 4 serie temporali …



… i loro istogrammi



… e le loro dispersioni



Nota: Il boxplot può essere visto come una sintesi delle informazioni contenute nel diagramma di dispersione.

Commenti:

- Nel caso dell'urna, l'istogramma descrive la variabilità naturale e può essere usato per fare previsioni (esempio: percentuale di prodotti fuori specifica)

- Se c'e' un trend oppure un salto della media (o altro andamento sistematico, per es. periodico), l'istogramma è fuorviante e non permette di fare previsioni.

- Un trend è difficilmente individuabile esaminando solo l'istogramma e/o il boxplot

- La mistura ("mixture") si verifica quando pesco casualmente da due urne diverse (esempio: prendo wafer che escono da due macchine diverse). L'istogramma è la sovrapposizione degli istogrammi delle due urne pesati in base alla percentuale di dati estratti da ciascuna.

- Una mistura non è distinguibile da un salto della media esaminando solo l'istogramma e/o il boxplot.

CONCLUSIONI

- Caratterizzazione completa di una V.C.: ci vuole la f.d.d. o la d.d.p.

- Caratterizzazione sintetica: media (baricentro) e varianza (indice della dispersione intorno al baricentro).

- Delle buone misure dovrebbero avere errori con media nulla, varianza piccola ed essere indipendenti tra loro.

- V.C. gaussiane: sono completamente caratterizzate da media e varianza.

- **<u>Se</u>** conosciamo un modello probabilistico (es. ddp gaussiana) sappiamo calcolare la probabilità degli eventi di interesse.

- Problema: stimare i modelli probabilistici a partire dai dati

$$\Downarrow$$

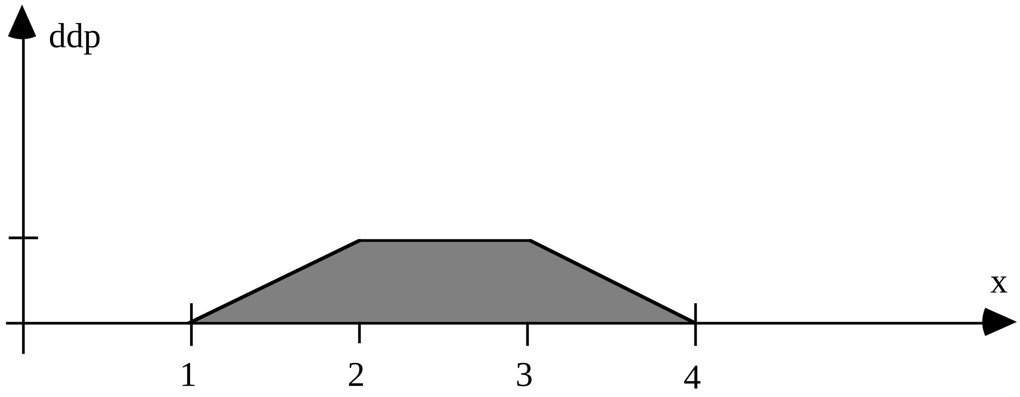
Statistica

DOMANDE

	V	F
1. Dati due eventi A, B tra loro indipendenti, risulta sempre $P(A+B) = P(A)+P(B)$	❑	❑
2. Se $P(B\|A) = P(B)$, i due eventi A e B sono indipendenti	❑	❑
3. Se si lanciano 2 dadi, la probabilità di un doppio "6" è pari a 1/36.	❑	❑
4. La funzione di distribuzione $F_X(x)$ tende a 0 per $x \to -\infty$.	❑	❑
5. Se $Y= 2X$, allora $Var[Y] = 2Var[X]$.	❑	❑
6. Se $Y = 2X$, allora $E[Y] = 2E[X]$.	❑	❑
7. Se $Y = X + 3$, allora $Var[Y] = Var[X] + 9$	❑	❑
8. Sia X una V.C. con $E[X] = 0$; se $Y=X/\sigma_X$, allora $Var[Y] = 1$.	❑	❑
9. Sia X una V.C. con $E[X] = 2$; se $Var[X] = 0$, allora $P(X=2) = 1$.	❑	❑
10. Sia X una V.C. gaussiana; se $Y = 6+2X$, allora Y è gaussiana.	❑	❑

ESERCITAZIONE 1

Si consideri la seguente densità di probabilità

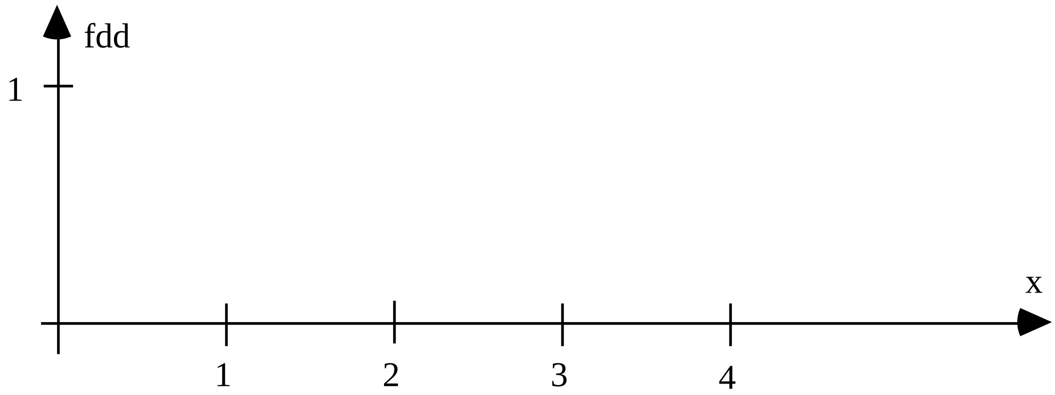


1.a Calcolare le seguenti probabilità:

$P(X \leq 1.5) =$ $\quad$ $P(X \leq 2) =$ $\quad$ $P(X \leq 3) =$

$P(X \leq 3.5) =$ $\quad$ $P(X \leq 4) =$ $\quad$ $P(2 \leq X \leq 3) =$

1.b Disegnare per punti la funzione di distribuzione.

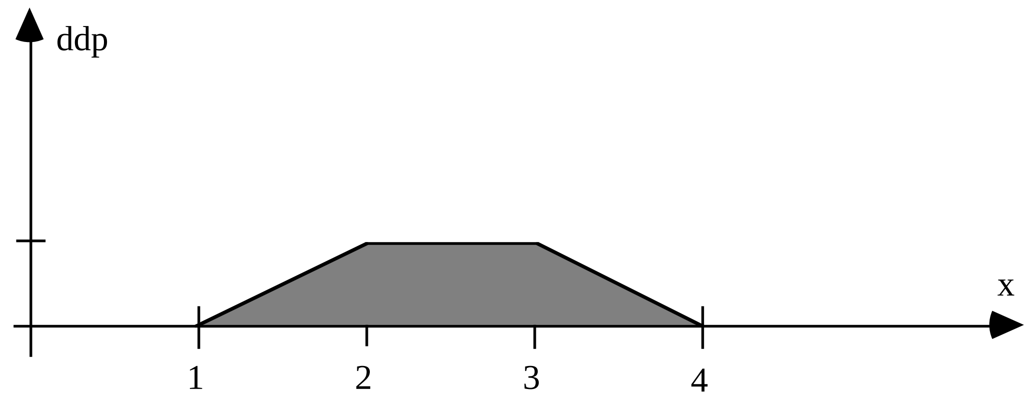


RISPOSTE

		V	F
1.	Dati due eventi A, B tra loro indipendenti, risulta sempre $P(A+B) = P(A)+P(B)$	❑	■
2.	Se $P(B\|A) = P(B)$, i due eventi A e B sono indipendenti	■	❑
3.	Se si lanciano 2 dadi, la probabilità di un doppio "6" è pari a 1/36.	■	❑
4.	La funzione di distribuzione $F_X(x)$ tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$.	■	❑
5.	Se $Y= 2X$, allora $Var[Y] = 2Var[X]$.	❑	■
6.	Se $Y = 2X$, allora $E[Y] = 2E[X]$.	■	❑
7.	Se $Y = X + 3$, allora $Var[Y] = Var[X] + 9$	❑	■
8.	Sia X una V.C. con $E[X] = 0$; se $Y=X/\sigma_X$, allora $Var[Y] = 1$.	■	❑
9.	Sia X una V.C. con $E[X] = 2$; se $Var[X] = 0$, allora $P(X=2) = 1$.	■	❑
10.	Sia X una V.C. gaussiana; se $Y = 6+2X$, allora Y è gaussiana.	■	❑

SOLUZIONE ESERCITAZIONE 1

Si consideri la seguente densità di probabilità



1.a Calcolare le seguenti probabilità:

$P(X \leq 1.5) = 1/16$ $P(X \leq 2) = 1/4$ $P(X \leq 3) = 3/4$

$P(X \leq 3.5) = 15/16$ $P(X \leq 4) = 1$ $P(2 \leq X \leq 3) = 0.5$

1.b Disegnare per punti la funzione di distribuzione.