Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati LS

Prof. G. De Nicolao

24 Novembre 2009

Cognome .... **Nome**..............................

Matricola.............................. **Firma**..............................

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.	
2.	
3.	
4.	

1. Si considerino una V.C. scalare θ di tipo esponenziale, con $E[\theta] = 1/\lambda$, ed un vettore casuale X tale che

$$X|\theta \sim N(\theta, \sigma^2 I)$$

I parametri λ e σ^2 sono noti.

(a) Scrivere, motivando la risposta, l'espressione del problema di ottimizzazione la cui soluzione fornisce θ^{MAP}.

(b) Si supponga che $X = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$ e $\sigma^2 = 1$. Calcolare, riportando i passaggi, il valore di θ^{MAP}.

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) La stima a massima verosimiglianza si basa sull'ipotesi che le osservazioni siano i.i.d..

□ □

(b) Siano $X_i \sim N(\theta, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$ delle V.C. tra loro indipendenti. Allora, θ^{ML} coincide con la media campionaria se e solo se $\sigma_i^2 = \sigma^2$, $\forall i$.

□ □

(c) Se X e θ sono incorrelate, la varianza dell'errore di stima dello stimatore MS lineare è pari a $Var[\theta]$.

□ □

(d) La stima θ^B, se esiste, è unica.

□ □

(e) Se $f_\theta(\theta)$ è costante, allora $\theta^{MAP} = \theta^{ML}$.

□ □

(f) Per il modello $Y = \Phi\theta^o + V, V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$, θ^{ML} è gaussiana se e solo se σ^2 è nota.

□ □

(g) Per il modello $Y = \Phi\theta^o + V, V \sim N(0, \sigma^2 I)$, relativamente alla stima θ^{ML}, la V.C. SSR è gaussiana.

□ □

(h) Si consideri lo stimatore di Bayes per il modello $Y = \Phi\theta + V, V \sim N(0, \Sigma_V), \theta \sim N(0, \Sigma_\theta)$, $\Sigma_V = \sigma^2\Psi > 0$, $\Sigma_\theta = \sigma^2\Omega > 0$, θ e V indipendenti. Allora, θ^B non dipende da σ^2.

□ □

(i) Per il modello $Y = \Phi(\theta^o) + V, V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$, il vettore dei residui $\epsilon := Y - \Phi(\theta^{ML})$ è gaussiano.

□ □

(j) Il test F per modelli lineari nei parametri assume la gaussianità dei dati.

□ □

3. Ricavare l'espressione del predittore ottimo ad un passo per modelli ARMAX, specificando le ipotesi che devono essere soddisfatte.

4. Si consideri il processo casuale stazionario $y(t)$ definito nel modo seguente:

$$x(t) = 2w(t) + 4w(t-1), \qquad w(t) \sim WN(0,1)$$
$$y(t) = x(t) + v(t), \qquad v(t) \sim WN(0,1)$$

dove $w(t)$ e $v(t)$ sono indipendenti.

(a) Ricavare, riportando i passaggi, $\gamma_{yy}(\tau)$.

(b) Ricavare, riportando i passaggi, $\Gamma_{yy}(\omega)$.

(c) Ricavare, riportando i passaggi, il fattore spettrale di $y(t)$