Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati

Esercitazione 1: esercizi
23 maggio 2007

Esercizio 1: distribuzione binomiale

Si considerino delle prove di Bernoulli con p = 0.5. Calcolare la distribuzione binomiale (ovvero la probabilità di avere k successi su n prove, al variare di k) per n = 2, 10, 100 prove (nota: l'istruzione `conv(a, b)` calcola la convoluzione di due sequenze di numeri `a` e `b`).

Soluzione:

```
f = [0.5 0.5]              % prob. di k = 0, 1 successi in 1 prova

f2 = conv(f,f)             % prob. di k = 0, 1, 2 successi in 2 prove

f10 = f;
for i = 1:9                % prob. di k = 0, 1, ..., 10 successi in 10 prove
   f10 = conv(f10, f);
end

f100 = f;
for i = 1:99               % prob. di k = 0, 1, ..., 100 successi in 100 prove
   f100 = conv(f100, f);
end

figure(1); plot([0 : 2], f2, '-*'); grid;
figure(2); plot([0 : 10], f10, '-*'); grid;
figure(3); plot([0 : 100], f100, '-*'); grid;
```

Quale risultato teorico giustifica l'andamento dei grafici al crescere di n?

Esercizio 2: media campionaria

Si consideri una sequenza X_k, k = 1..N, di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite in modo uniforme in [0, 1], e la loro media campionaria

$$M(N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$$

a. Fissato N, estrarre N campioni in modo uniforme (ad esempio, col comando `rand(1, N)`) e calcolarne la media campionaria. Ripetere l'operazione ad esempio 1000 volte, memorizzando ogni volta la media campionaria risultante all'interno di un vettore:

```
N = 200
for u = 1 : 1000
   M(u) = sum(rand(1, N)) / N;
end
```

Queste istruzioni creano automaticamente un vettore M di 1000 elementi. Il valore atteso e la varianza dello stimatore media campionaria M(N) (N fissato) possono quindi essere calcolate con le istruzioni

```
mean(M)
var(M)
```

Usando i dati del vettore M posso costruire un istogramma, il quale approssima la ddp dello stimatore. Ci si potrà aspettare quindi che l'istogramma presenti un valor medio e una varianza simili a quelli appena ricavati:

```
hist(M)
```

b. Ora si provi ad aumentare N di 10 volte, ad esempio, e ripetere le operazioni. Che comportamento ci si può aspettare da media e varianza? Cosa ci si può aspettare che succeda aumentando ancora N? Qual'è il principio teorico alla base di questi risultati?

c. Si confrontino gli istogrammi ottenuti con N = 2 e con un N grande (5 o più). Come varia la forma dell'istogramma? Quale principio teorico giustifica tale risultato?

Esercizio 3: il valore di p

Utilizzando l'istruzione per generare V.C. i.i.d uniformi in [0, 1] (`rand()`), sviluppare un algoritmo per il calcolo approssimato di π.

<u>Suggerimento</u>: si consideri l'esperimento casuale consistente nell'estrazione di un punto scelto in modo equiprobabile nel quadrato $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Si consideri il cerchio di diametro 1 all'interno di tale quadrato, e si osservi che ogni punto estratto in modo casuale può cadere dentro o fuori dal cerchio...