1. Si indichi con X una V.C. gaussiana con $E[X] = 2$, $Var[X] = 1$.

1.a Calcolare $E[X^2]$.

$$\mathbf{Var[X] = E[X^2] - E[X]^2}$$

$$\mathbf{E[X^2] = Var[X] + E[X]^2 = 5}$$

1.b Dimostrare che $E[\chi^2_N] = N$, dove χ^2_N indica la V.C "chi quadro" ad N gradi di libertà.
Suggerimento: date N variabili gaussiane standard Z_i, indipendenti , χ^2_N = …

$$\boldsymbol{\chi^2_N = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_N^2}$$

$$\mathbf{E[\chi^2_N] = \sum_{i=1}^{N} E[Z_i^2] = N}$$

Infatti, $\mathbf{E[Z_i^2] = Var[Z_i] - E[Z_i]^2 = 1}$

2. Date delle V.C. X e Y congiuntamente gaussiane con E[X] = E[Y] = 0, si considerino le seguenti triplette di varianze e covarianze:

1) $\sigma_X^2 = 9, \sigma_Y^2 = 1, \ \sigma_{XY} = 0$

2) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 9, \ \sigma_{XY} = 0$

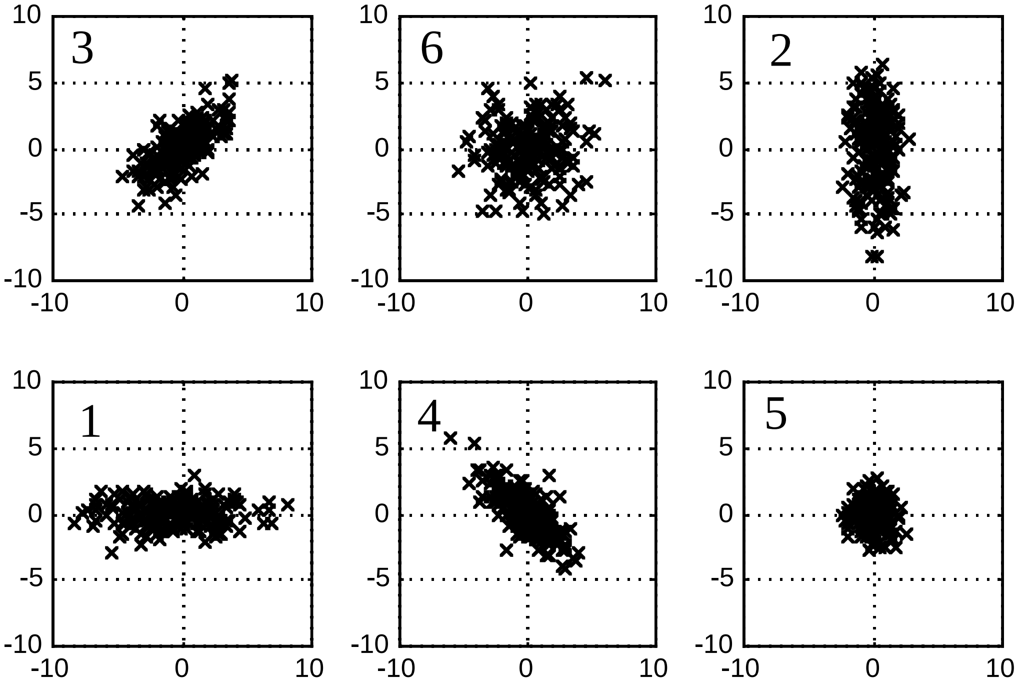
3) $\sigma_X^2 = 3, \sigma_Y^2 = 3, \ \sigma_{XY} = 2.1$

4) $\sigma_X^2 = 3, \sigma_Y^2 = 3, \ \sigma_{XY} = -2.1$

5) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \ \sigma_{XY} = 0$

6) $\sigma_X^2 = 4, \sigma_Y^2 = 4, \ \sigma_{XY} = 0$

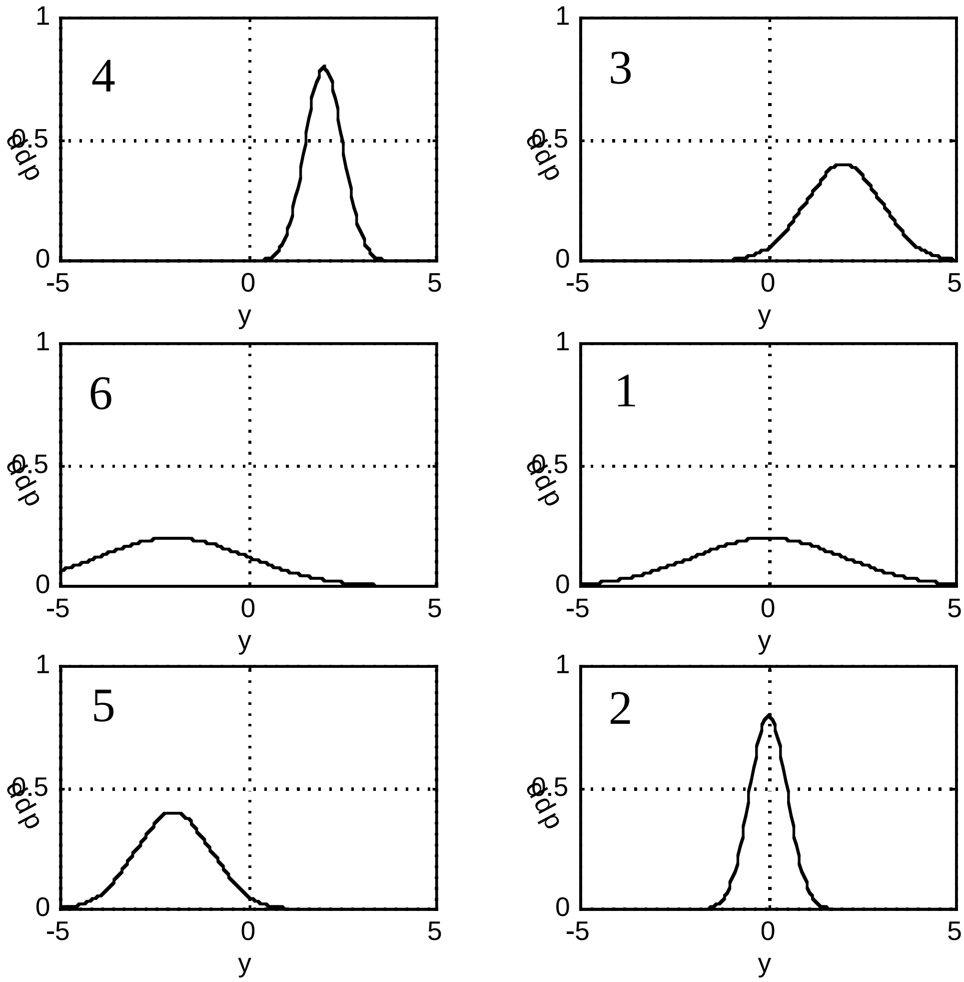
Riportare sopra i seguenti scatter plot il numero della corrispondente tripletta $\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_{XY}$



3. Sia $Y = \alpha Z + \beta$, dove $Z \tilde{} N(0,1)$. Si considerino le seguenti scelte per i parametri α e β:

1) $\alpha = -2$,	$\beta = 0$	2) $\alpha = -0.5$,	$\beta = 0$
3) $\alpha = 1$,	$\beta = 2$	4) $\alpha = 0.5$,	$\beta = 2$
5) $\alpha = -1$,	$\beta = -2$	6) $\alpha = 2$,	$\beta = -2$

Riportare sopra i seguenti grafici delle densità di probabilità di Y il numero della corrispondente coppia α,β



4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Se Y è una V.C. lognormale, allora $X = e^Y$ è una V.C. gaussiana.

  ❑ ■

- Lanciando due volte una moneta onesta la probabilità di ottenere testa almeno una volta è pari a 0.75.

  ■ ❑

- Un sacchetto contiene una moneta onesta ed una moneta truccata con P(Testa) = 0.7. Si sceglie ad occhi chiusi una moneta e la si lancia. In tale esperimento, P(Testa) = 0.6.

  ■ ❑

- Nell'identificazione ai minimi quadrati di un modello lineare nei parametri, se n=q, la condizione di identificabilità è sicuramente verificata (n: numero dei dati, q: numero dei parametri).

  ❑ ■

- Se identifico mediante i minimi quadrati una famiglia di modelli gerarchici, la somma dei quadrati dei residui decresce al crescere del numero dei parametri del modello.

  ■ ❑

- L'uso del criterio FPE (sotto le sue ipotesi di applicabilità) conduce ad una stima polarizzata del numero dei parametri del modello..

  ■ ❑

- Se $Y = \Phi\theta + V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = \sigma^2 I$, allora lo stimatore LS coincide con lo stimatore BLUE (Best Linear Unbiased Estimator).

  ■ ❑

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$. Allora, se N quadruplica, l'intervallo di confidenza per m si dimezza.

  ■ ❑

- Se X e Y sono due V.C. congiuntamente gaussiane con $E[XY] = E[X]E[Y]$, allora X e Y sono indipendenti.

  ■ ❑

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,100$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] =1$. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [\bar{X}-\delta,\bar{X}+\delta]$ con $\delta < 0.2$.

  ■ ❑

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
• Se Y è una V.C. lognormale, allora X = log(Y) è una V.C. gaussiana.	■	❑
• Lanciando due volte una moneta onesta la probabilità di ottenere testa almeno una volta è pari a 0.5.	❑	■
• Un sacchetto contiene una moneta onesta ed una moneta truccata con P(Testa) = 0.7. Si sceglie ad occhi chiusi una moneta e la si lancia. In tale esperimento, P(Testa) = 0.55.	❑	■
• Nell'identificazione ai minimi quadrati di un modello lineare nei parametri, se n=q, la condizione di identificabilità è sicuramente verificata (n: numero dei dati, q: numero dei parametri).	❑	■
• Se identifico mediante i minimi quadrati una famiglia di modelli gerarchici, la somma dei quadrati dei residui cresce al crescere del numero dei parametri del modello.	❑	■
• L'uso del criterio MDL (sotto le sue ipotesi di applicabilità) conduce ad una stima polarizzata del numero dei parametri del modello..	❑	■
• Se $Y = \Phi\theta+V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = I$, allora lo stimatore LS coincide con lo stimatore BLUE (Best Linear Unbiased Estimator).	■	❑
• Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\dots,N$, $E[X_i] = m$ Allora, se N raddoppia, l'intervallo di confidenza per m si dimezza.	❑	■
• Se X e Y sono due V.C. congiuntamente gaussiane con $E[XY] = E[X]E[Y]$, allora X e Y sono incorrelate.	■	❑
• Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\dots,100$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] =1$. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [\bar{X}-\delta,\bar{X}+\delta]$ con $\delta < 0.1$.	❑	■

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Se X è una V.C. lognormale, allora $Y = e^X$ è una V.C. gaussiana.

❑ ■

- Lanciando due volte una moneta onesta la probabilità di ottenere testa almeno una volta è pari a 0.75.

■ ❑

- Un sacchetto contiene una moneta onesta ed una moneta truccata con P(Testa) = 0.75. Si sceglie ad occhi chiusi una moneta e la si lancia. In tale esperimento, P(Testa) = 0.6.

❑ ■

- Nell'identificazione ai minimi quadrati di un modello lineare nei parametri, se $n>q$, la condizione di identificabilità è sicuramente verificata (n: numero dei dati, q: numero dei parametri).

❑ ■

- Se identifico mediante i minimi quadrati una famiglia di modelli gerarchici, la somma dei quadrati dei residui decresce al crescere del numero dei parametri del modello.

■ ❑

- L'uso del criterio AIC (sotto le sue ipotesi di applicabilità) conduce ad una stima non polarizzata del numero dei parametri del modello..

❑ ■

- Se $Y = \Phi\theta+V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = \sigma^2 I$, allora lo stimatore LS coincide con lo stimatore BLUE (Best Linear Unbiased Estimator).

■ ❑

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\dots,N$, $E[X_i] = m$ Allora, se N raddoppia, l'intervallo di confidenza per m si raddoppia.

❑ ■

- Se X e Y sono due V.C. con $E[XY] = E[X]E[Y]$, allora X e Y sono indipendenti.

❑ ■

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\dots,100$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] =4$. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [\bar{X}-\delta,\bar{X}+\delta]$ con $\delta < 0.2$.

❑ ■

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	F
• Se Y è una V.C. lognormale, allora $X = e^Y$ è una V.C. gaussiana.	❑	■
• Lanciando due volte una moneta onesta la probabilità di ottenere testa almeno una volta è pari a 0.25.	❑	■
• Un sacchetto contiene una moneta onesta ed una moneta truccata con P(Testa) = 0.8. Si sceglie ad occhi chiusi una moneta e la si lancia. In tale esperimento, P(Testa) = 0.65.	■	❑
• Nell'identificazione ai minimi quadrati di un modello lineare nei parametri, se n=2q, la condizione di identificabilità è sicuramente verificata (n: numero dei dati, q: numero dei parametri).	❑	■
• Se identifico mediante i minimi quadrati una famiglia di modelli gerarchici, la somma dei quadrati dei residui cresce al decrescere del numero dei parametri del modello.	■	❑
• L'uso del criterio MDL (sotto le sue ipotesi di applicabilità) conduce ad una stima non polarizzata del numero dei parametri del modello.	■	❑
• Se $Y = \Phi\theta+V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = I$, allora lo stimatore LS coincide con lo stimatore BLUE (Best Linear Unbiased Estimator).	■	❑
• Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$. Allora, se N raddoppia, l'intervallo di confidenza per m si riduce di quattro volte.	❑	■
• Se X e Y sono due V.C. congiuntamente gaussiane con $E[XY] = E[X]E[Y]$, allora X e Y sono incorrelate.	■	❑
• Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,100$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] =3$. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [\bar{X}-\delta,\bar{X}+\delta]$ con $\delta < 0.2$.	❑	■