IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI ED ANALISI DEI DATI

prof. Giuseppe De Nicolao

Dipartimento di Informatica e Sistemistica

Università degli Studi di Pavia

giuseppe.denicolao@unipv.it

Appunti delle lezioni tenute nella sede staccata di Mantova nell'Anno Accademico 2008-2009
(a cura di Franco Varoli con la revisione del prof. Giuseppe De Nicolao)

INFORMAZIONI UTILI

Orario di ricevimento: venerdì 13 e 45 – 15 e 45 (te. 0382-985484)
Sito web con materiale didattico, temi d'esame ed esiti delle prove scritte: http://sisdin.unipv.it
Prove in itinere: 05/05/09 e 07/07/09. L'esame è scritto e propone quattro quesiti, due di carattere teorico e due esercizi
Prerequisiti: occorre aver consolidato in maniera sufficiente le conoscenze di base in campo matematico, con particolare riguardo ai concetti di integrale, derivata e algebra matriciale. Sul sito sono presenti file di autovalutazione con quesiti di Algebra e Geometria e relative soluzioni

LEZIONE (1) 02/03/09

PRESENTAZIONE DEL CORSO

•) Modelli:

Ogni modello fa riferimento alla realtà (fenomeno o sistema fisico)

Il modello è legato alla realtà da un rapporto di similitudine e di diversità

Se il modello non fosse simile alla realtà non sarebbe utile, ma, nella schematizzazione della stessa deve anche essere diverso. Se fosse identico, non servirebbe.

Consideriamo ad esempio una carta topografica che è simile alla realtà poiché ne rappresenta gli aspetti principali. Allo stesso tempo la carta non è il terreno poiché lo rappresenta a scala ridotta anche di molto e dalla realtà sono stati eliminati molti elementi inutili che avrebbero creato confusione.

•) Tipi di modelli:

-) m. fisici (dighe, ponti, edifici) costruiti realmente in scala ridotta soprattutto in campo idraulico e strutturale

-) m. animali: in campo biomedico lo sviluppo di un nuovo farmaco è testato su cavie animali.

La similitudine risiede nel fatto che si rende conto che se il farmaco funziona sull'animale, potrà funzionare anche sull'uomo.

La differenza consiste nel fatto che in tal modo non si fanno esperimenti che, per motivi etici, non si possono fare.

-) m. da rapporti interpersonali che permettono di avere un'idea dell'interlocutore a partire da alcuni indizi.

-) m. matematici

Sono relazioni matematiche che descrivono quantitativamente i legami che esistono tra le variabili di un determinato fenomeno.

Ad esempio, $\vec{F} = m \vec{a}$ (legge di Newton).

Di fronte ad un fenomeno complesso si prendono in esame alcune variabili legate da relazioni matematiche, che permettono di fare previsioni di tipo quantitativo, al fine di prendere opportune ~~previsioni~~ decisioni.

Lo sviluppo della scienza moderna e dell'attuale tecnologia è basato su un uso massiccio di modelli matematici, iniziato prevalentemente nell'epoca di Newton e Galileo e, successivamente, proseguito nel campo dell'elettromagnetismo e della termodinamica.

Oggi, i m. matematici sono molto usati anche in campo biomedico, in campo economico ed in meteorologia.

Pregi dei m. matematici:

•) rigore matematico: i calcoli basati sul modello matematico sono gli stessi anche se si cambia lo strumento di calcolo o la persona che lo esegue.

•) basso costo: in generale basta un normale PC per eseguire le elaborazioni del modello; solo raramente sono richiesti supercomputer.

Anche in quest'ultimo caso il costo è comunque inferiore a quello necessario per la realizzazione di un m. fisico.

•) versatilità: i valori delle grandezze possono essere facilmente cambiati ed avere effetti diversi della simulazione, nei confronti dei m. fisici.

•) ottima funzionalità nella maggior parte dei casi.

•) Possibili usi dei modelli:

-) previsione: i modelli sono usati per prevedere ciò che accadrà (previsioni meteorologiche).

Le previsioni sono utilizzate anche in campo medico per stabilire i trattamenti sui pazienti (dosi di medicine).

-) codifica: le diverse modalità di codifica e comportamento, in campo musicale utilizzano modelli che tentano di individuare il campione successivo, al fine di memorizzare la differenza tra i campioni e non l'intero campione con risparmio quindi sensibile nel numero di bit utilizzati.

-) interpretazione, diagnosi e classificazione.

Gli modelli aiutano spesso a comprendere un fenomeno confrontando i dati sperimentali con le previsioni dei diversi modelli.

-) simulazione, addestramento e progetto

L'addestramento dei piloti e degli astronauti avviene con opportuni simulatori di volo dietro ai quali sta un modello matematico che calcola le risposte di un aereo vero che viene espresso in modo grafico su uno schermo o, anche, in maniera meccanica.

Anche l'addestramento di operatori di impianti complessi e delicati, quali le centrali termoelettriche avviene su modelli che permettono di simulare le situazioni di emergenza.

Anche in campo medico alcune situazioni vengono simulate su pazienti virtuali (finti).

-) controllo (in anello chiuso) di tipo patologico o meccanico su modelli matematici del motore per far sì che lo stato di un sistema perturbato ritorni più o meno rapidamente in condizioni stabili.

-) sensori virtuali, laddove non è possibile l'accessibilità ai sensori reali o quando questi sarebbero troppo costosi.

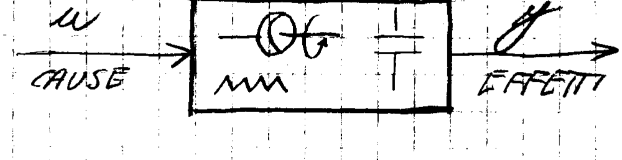
•) costruzione dei modelli (matematica)

1) usando leggi fisiche (approccio classico)

È un approccio detto anche a scatola trasparente (WHITE-BOX)

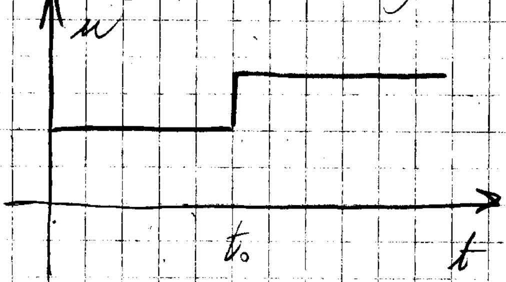
Si analizza il sistema reale e si costruisce un modello per ogni componente

u = ingresso
y = uscita

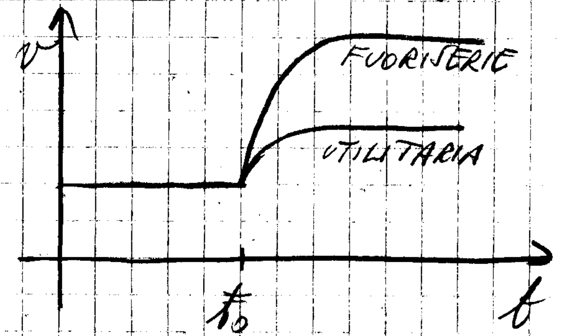


L'hanno difficoltà nel caso di sistemi troppo complessi che richiederebbero tempi troppo lunghi oppure laddove non siano note leggi di natura, come nel caso della biologia o dell'economia.

2) si parte dai dati (modellizzazione a scatola nera (BLACK-BOX))



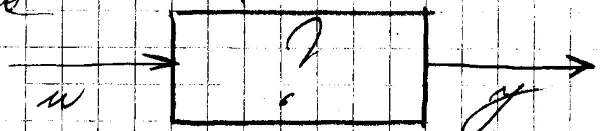
viaggiando in autostrada ad una determinata apertura della valvola a farfalla (u) al tempo t_0 si produce una variazione a gradino.



la corrispondente variazione della velocità (v) è rappresentata a destra per una utilitaria ed una fuoriserie

La reazione è simile a quella che si avrebbe con un circuito RC del 1° ordine.

Si cerca di modellizzare come si modifica l'uscita (v) quando si modifica l'ingresso mediante esperimenti e misure, senza entrare nei dettagli del sistema e senza analizzarne i componenti.



Sintetizzando si passa dai dati al modello mediante esperimenti.

3) approccio intermedio (modellizzazione a scatola grigia – GRAY-BOX)

In questo caso si conosce la legge fisica, ma mancano alcuni parametri, come nel caso del sistema solare.

Il movimento dei pianeti è regolato dalla legge di gravitazione universale, ma mancano le masse dei pianeti.

L'unica possibilità di realizzare un modello consiste nell'eseguire osservazioni astronomiche (traiettorie dei pianeti) calibrando le masse dei pianeti finché le osservazioni eseguite coincidono con le previsioni del modello matematico

Per tentativi si regolano le masse dei pianeti finché i dati sperimentali non combaciano con le previsioni.

Anche nel caso di un motore elettrico, se ne può conoscere il funzionamento, ma probabilmente manca il coefficiente d'attrito, difficilmente prevedibile a priori.

c) <u>Identificazione dei modelli</u> (o dei sistemi)
(MODEL IDENTIFICATION o SYSTEM ID.)

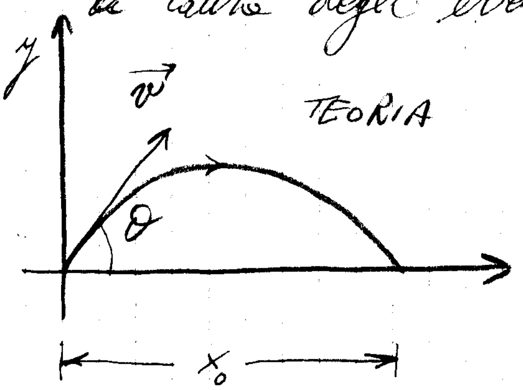
È la disciplina che si occupa della costruzione dei modelli matematici a partire dai dati sperimentali.

Opera sia sulla modellizzazione black-box o grey-box.

Il <u>pregio</u> consiste nel poter realizzare il modello senza conoscere le leggi di natura.

Il <u>limite</u> è evidente nel fatto che i modelli ottenuti funzionano solo in condizioni simili a quelle in cui sono stati raccolti i dati.

Occorre cautela nell'estrapolazione dei dati, a causa degli errori in essi contenuti.



<u>Esempio</u> del lancio di un proiettile (caso e necessità)

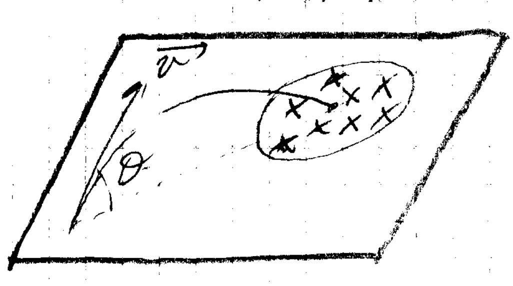
Si lanci un proiettile con la velocità iniziale v_0 ed angolo θ.

Si calcoli dove cadrà il proiettile.

Si trova che la gittata è

$$x_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

REALTÀ



Analizzando il caso reale si nota che ripetendo il lancio più volte, con gli stessi dati iniziali, si ottiene una nuvola di punti di caduta.

Il modello considerato dalla teoria è un modello semplificato che non tiene conto della resistenza dell'aria, delle folate di vento e della densità dell'aria alle diverse quote, nonché di tante altre cause di errori accidentali.

L'approccio reale consiste nel modellizzare ciò che risulta possibile prevedere imputando tutto il resto a fenomeni casuali, adottando modelli statistici.

Ciò che non si sa o non si vuol descrivere è attribuito al caso con la conseguente necessità di analisi statistica dei dati.

PROBABILITÀ

ovvero Gli assiomi della probabilità

La probabilità è definita su insiemi.

•) Terminologia insiemistica

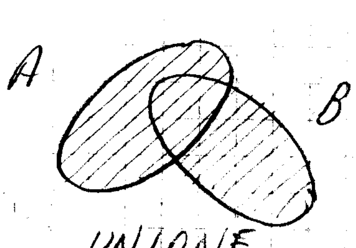
-) Insieme S degli esiti di un esperimento casuale
Ad esempio, l'insieme S dei lanci di un dado è
$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

-) Evento: è un sottoinsieme di S.

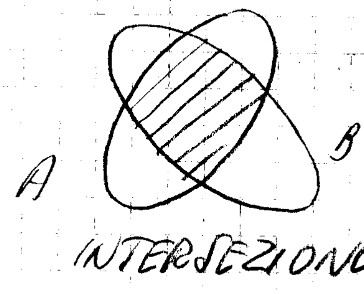
Analizziamo la differenza tra esito ed evento. Semplificando i concetti, un evento è rappresentato da tutto ciò su cui si può scommettere.

Nel caso del dado, $A = \{2, 4, 6\}$ è un evento.
Il dado ha sei esiti possibili e l'uscita di un numero pari è un evento su cui si può scommettere.

Gli esiti sono i singoli risultati possibili.
Gli eventi sono molto più numerosi degli esiti
Convenzioni utilizzate
- Unione di eventi: è indicata con $A+B$ (altrove $A \cup B$)
- Intersezione sono indicate con AB (altrove $A \cap B$)



UNIONE
$A+B$



INTERSEZIONE
AB

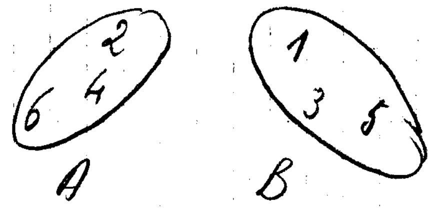
-) Eventi disgiunti (o incompatibili): sono eventi che non possono verificarsi contemporaneamente

Nell'esempio del dado

$A = \{2, 4, 6\}$ (num. pari) e

$B = \{1, 3, 5\}$ (num. dispari)

sono eventi disgiunti non avendo alcun elemento in comune.



$AB = \{\emptyset\}$ (insieme vuoto)

Nella teoria delle probabilità l'insieme vuoto rappresenta un evento impossibile

-) Evento certo: evento che si verifica con certezze.

Nell'esempio del dado

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

è un evento certo e coincide con l'insieme degli esiti

$$A \equiv S$$

-) Unione (o somma) di eventi

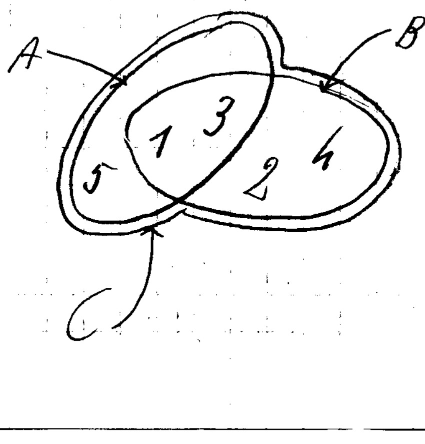
$C = A + B$ è l'evento che si verifica se si verifica A oppure B.

Esempio: $A = \{1, 3, 5\}$ (numero dispari), $B = \{1, 2, 3, 4\}$ (numero ≤ 4)

ne consegue che

$$A + B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Utilizzando i diagrammi di Venn



John Venn (1834-1923) matematico e statistico inglese

-) <u>Intersezione (o prodotto) di eventi</u>

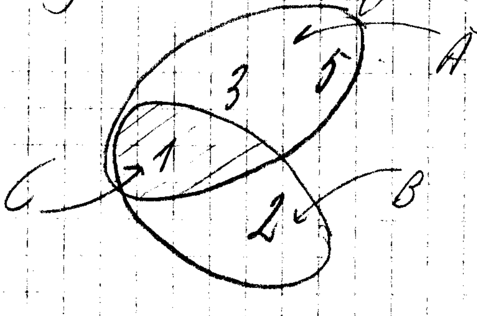
$C = AB$ è l'evento che si verifica se si verificano sia A che B.

C è detto anche evento congiunto

Esempio: $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2\}$

Ne deriva che

$C = \{1\} = AB$



-) <u>Evento negato</u>

$B = \overline{A}$ è l'evento che si verifica se e solo se non si verifica A

Esempio: $A = \{1, 3, 5\}$

Ne consegue che

$\overline{A} = \{2, 4, 6\}$

-) <u>Insieme $\mathcal{F}$ degli eventi</u>

$\mathcal{F}$ è una classe ~~detto~~ di sottoinsiemi di S che gode delle seguenti proprietà

1) se $A \in \mathcal{F}$ anche $\overline{A} \in \mathcal{F}$

Esempio del dado: se $\{1\}$ è un evento, allora anche

$\{2, 3, 4, 5, 6\}$

è un evento.

Cioè, se $\{1\} \in \mathcal{F} \Longrightarrow \{2, 3, 4, 5, 6\} \in \mathcal{F}$

2) se $(A \in \mathcal{F})$ AND $(B \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A+B) \in \mathcal{F}$

Se A appartiene ad $\mathcal{F}$ e B appartiene ad $\mathcal{F}$ allora anche l'unione di A e B appartiene ad $\mathcal{F}$.

Esempio: se $\{1\} \in \mathcal{F}$ e $\{2\} \in \mathcal{F}$, anche

$\{1, 2\} \in \mathcal{F}$

<u>Nota 1</u>: si dimostra che se A è un evento e B è un evento le precedenti proprietà implicano che AB è un evento

$$(A \in \mathcal{F}) \text{ AND } (B \in \mathcal{F}) \Longrightarrow (AB \in \mathcal{F})$$

<u>Nota 2</u>: per rispettare la definizione, $\mathcal{F}$ deve sempre contenere due eventi particolari:

- l'evento impossibile $\{\emptyset\}$
- l'evento certo $\mathcal{S}$

Infatti se A è un evento, anche $\bar{A}$ è un evento e quindi

$$A + \bar{A} \text{ è un evento}$$

Ma $A + \bar{A}$ è l'evento certo $\mathcal{S}$

$$A + \bar{A} = \mathcal{S}$$

Inoltre $A\bar{A} = \{\emptyset\}$ e $A\bar{A} \in \mathcal{F}$ ne consegue che $\{\emptyset\} \in \mathcal{F}$

<u>Esempio del totocalcio</u>

Consideriamo una sola partita. L'insieme degli esiti è

$$\mathcal{S} = \{1, x, 2\}$$

Allora

$$\mathcal{F} = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{x\}, \{2\}, \{1, x\}, \{1, 2\}, \{x, 2\}, \{1, x, 2\}\}$$

$\{\emptyset\}$ è l'evento impossibile

$\{1, x, 2\}$ è l'evento certo

Nel totocalcio gli esiti sono tre $(1, x, 2)$, ma le scommesse possibili sono molte di più!

•) Definizione di probabilità

-) definizione assiomatica

$$P(\cdot) : \mathcal{F} \mapsto [0, 1]$$

La probabilità è una funzione definita sull'insieme $\mathcal{F}$ e che restituisce dei valori compresi tra 0 e 1.

In altre parole essa è una funzione che associa ad ogni evento $A \in \mathcal{F}$, un numero

$$P(A)$$

in modo che valgono le seguenti ~~proba~~ proprietà:

1) $P(A) \geq 0$
2) $P(S) = 1$
3) se $AB = \{\emptyset\}$ (A e B eventi disgiunti), allora
$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

La definizione è attribuita al matematico russo Andrej Kolmogorov (1903 - 1987).

Ci si può trovare disorientati di fronte a questa definizione che non definisce in maniera chiara.

Sarebbe gradita e preferibile una definizione che stabilisse ad esempio, che all'evento "TESTA" attribuisse una probabilità pari a 0,5.

La definizione data non permette di assegnare a "TESTA" alcun numero. Tutti i numeri vanno bene purché valgano le suddette proprietà.

Ne consegue la seguente osservazione: dato un insieme di eventi, esistono infiniti modi di assegnare la probabilità.

Esempio della moneta: supponiamo, con decisione soggettiva, che la probabilità di TESTA sia 0,5

$$P(T) = 0,5$$

osserviamo che

$$P(T+C) = P(\text{evento certo}) = 1$$

Se TESTA e CROCE sono elementi disgiunti, dal terzo assioma consegue che

$$P(T+C) = P(T) + P(C)$$

Ma $P(T+C) = 1$ (dalla pagina precedente)

Quindi:

$$P(C) = 1 - P(T) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

In pratica, si può assegnare una probabilità qualsiasi a TESTA, ma allora la probabilità di CROCE è vincolata.

Più generalmente, se $P(T) = p$ $\quad (0 \le p \le 1)$ ne consegue necessariamente che

$$P(C) = 1 - p.$$

Ciò, benché strano, ma permette di considerare anche le monete truccate.

In effetti, al variare di p, si ottengono tutte le possibili monete truccate.

Il pregio della definizione di Kolmogorov consiste nel fatto di essere flessibile e di potersi adattare a tutte le situazioni.

Resta aperto il problema di decidere come assegnare i valori numerici delle probabilità.

L'argomento verrà affrontato in seguito, quando si parlerà di statistica.

-) <u>definizione classica</u>

$$p = \frac{\#\ \text{eventi favorevoli}}{\#\ \text{eventi possibili}}$$

La probabilità è il rapporto tra il numero degli eventi possibili e quello favorevoli.

Nel caso del dado, la probabilità che esca un numero pari è data da

$$P(\text{pari}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Se il dado è truccato, la definizione non funziona. Per ovviare all'inconveniente si aggiunge

che gli esiti debbano essere equiprobabili.
Dall'altra parte, è anche stato che non si può parlare di equiprobabilità prima di avere definito la probabilità stessa.

-) frequenza relativa (concetto che porta alla definizione di probabilità)

L'esperimento è ripetuto n volte indicando con n_A il numero di volte che si verifica l'evento A.

Si definisce $P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$

Questa definizione è migliore di quella classica ma l'esperimento non può essere ripetuto infinite volte, perciò il limite non può essere calcolato.

•) Corollari conseguenti alla definizione assiomatica

1) $P(A) = (1 - P(\bar{A})) \leq 1$
ricordiamo che $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ (ev. certo)

2) se $B \subset A \Rightarrow P(B) < P(A)$
se B è contenuto in A la sua probabilità è minore di quella di A.

3) $P\{\emptyset\} = 0$
la probabilità dell'evento impossibile è pari a zero.

4) se $A_1, A_2, \dots A_n$ sono eventi disgiunti (le loro intersezioni sono tutte nulle), allora
$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

5) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ A e B qualsiasi

I cinque corollari si dimostrano e non sono assiomi.
Si noti la differenza tra il terzo assioma e l'ultimo corollario. Mentre nell'assioma 3 A e B sono disgiunti, ora non lo sono. Il corollario è la formula generale per calcolare la probabilità della somma di due eventi.

Se A e B sono eventi disgiunti, $P(AB)=0$ e si ritrova l'assioma 3.

Esempio Calcolare la probabilità nel lancio di un dado dell'uscita di un numero pari o minore di 3.

Applichiamo il corollario 5 e definiamo gli eventi

$A=\{2,4,6\}$ $\quad B=\{1,2\}$

Supponiamo che il dado non sia truccato

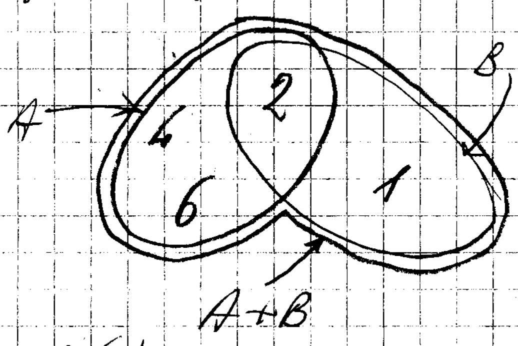
$p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ $\quad B=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$p(AB)=\frac{1}{6}$

$$p_{cercata}=p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

Verifichiamo il risultato con i diagrammi di Venn



Il fatto di dover sottrarre la probabilità di AB è dovuto all'aver contato due volte la probabilità relativa al numero 2.

$P(2)$ è contenuta sia in $P(A)$ che in $P(B)$.

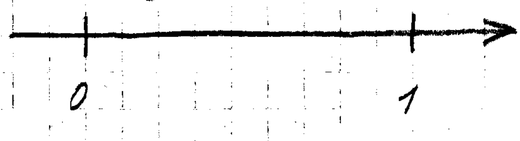
Esercizio (da svolgere personalmente)

Trovare la formula per il calcolo di

$$P(A+B+C)$$

•) <u>Esperimenti con infiniti esiti</u>

Si scelga un numero reale qualsiasi compreso tra 0 e 1.



$$\mathcal{S} \in [0, 1]$$

L'insieme $\mathcal{S}$ degli esiti comprende infiniti valori.

In questo caso si richiede che l'insieme degli eventi $\mathcal{F}$ soddisfi una ipotesi aggiuntiva

2') Se si considerano gli eventi $A_i \in \mathcal{F}$

con $i = 1, 2, \ldots, \infty$,

allora anche la sommatoria degli eventi A_i appartiene ad $\mathcal{F}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

La sommatoria è anche detta unitoria, poiché si tratta, invero, di una unione di insiemi.

È stata estesa l'ipotesi 2 di pagina 9 secondo la quale se due eventi appartengono all'insieme $\mathcal{F}$ anche la loro unione appartiene ad $\mathcal{F}$.

L'ipotesi vale anche se il numero di eventi considerato è infinito.

Quando un insieme $\mathcal{F}$ soddisfa le ipotesi 1, 2, 2' è chiamato <u>insieme di BOREL</u> o una <u>σ-algebra</u>.

EMILE BOREL (1871 – 1956) matematico e politico francese.

Si aggiunge anche un terzo assioma.

3') se A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ sono eventi disgiunti e se

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i ,$$

allora

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

~~La proprietà prende il nome di proprietà di additività completa~~

Questa è la proprietà di additività completa.
La proprietà 3) di pag. 11 è detta di additività semplice.
Il postulato 3') non è obbligatorio, ma utile nelle applicazioni.

•) Spazio degli enti equiprobabili
Consideremo due casi.

1) cardinalità finita

Definizione: lo spazio degli enti S è equiprobabile se, essendo

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

con s_i = evento elementare,
la probabilità di un evento A composto dall'unione di r_A eventi elementari è

$$p(A) = \frac{r_A}{n}$$

Si recupera come caso particolare, la definizione di probabilità di pag. 12.

Si intende appartenere ad essa una categoria di esperimenti casuali (con spazio degli enti equiprobabili) in cui la probabilità si può ottenere nel modo appena indicato.
Il dado non truccato è uno spazio degli enti equiprobabili, in cui si può contare il numero degli eventi favorevoli.

2) cardinalità infinita

Definizione: S è equiprobabile se valgono:

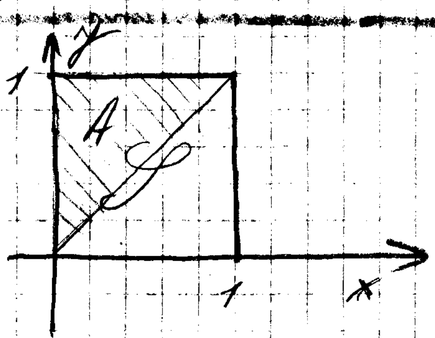
i) su S è definita una misura geometrica, quale lunghezza, area, volume, ecc.

ii) la misura geometrica di S è diversa da zero

$$m(S) \neq 0$$

iii) $p(A) = \dfrac{m(A)}{m(S)}$

Esempio



Sia S il quadrato di lato unitario.

$S = \{\text{quadrato unitario}\}$

oppure, più formalmente,

$$S = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 ,\ 0 \le y \le 1\}$$

S è definito da tutte le coppie di punti (x,y) tali che x e y sono compresi tra 0 e 1.

Definiamo ora l'insieme A

$$A = \{(x,y) : (x,y) \in S \text{ e } y \ge x\}$$

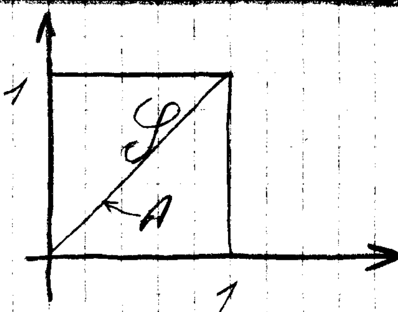
L'esperimento casuale consiste nel considerare un punto qualsiasi nel quadrato.

Ipotizziamo che S sia equiprobabile, nel senso che nel quadrato non esistono punti privilegiati.

Ne consegue che $p(A) = \dfrac{m(A)}{m(S)} = \dfrac{1}{2} : 1 = \dfrac{1}{2}$

Esempio

$S = \{\text{quadrato unitario}\}$



$$A = \{(x,y) : (x,y) \in S,\ (x,y) \in (x=y)\}$$

In definitiva e meno formalmente, A è l'insieme dei punti che stanno sulla diagonale (ed appartengono ad S).

Ipotizziamo ancora che S sia equiprobabile.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} = 0$$

Il rapporto va fatto considerando grandezze omogenee. Essendo nulla l'area di A, il rapporto vale zero.

Sono infinite i punti che appartengono alla diagonale, ma quelli che appartengono al quadrato rappresentano un infinito di ordine superiore.

Il denominatore rappresenta una quantità infinitamente maggiore di quella che al numeratore.

Si osservi che $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1$

Dal punto di vista geometrico, $\bar{A}$ rappresenta l'insieme di punti del quadrato, esclusi quelli che appartengono alla diagonale.

I risultati ottenuti sono apparentemente paradossali poiché ci mostrano che ci sono eventi possibili con probabilità nulla e che probabilità pari ad 1 non significa certezza.

A è un evento possibile, con $p(A) = 0$

$\bar{A}$ non è un evento certo, con $p(\bar{A}) = 1$

In altre parole se un evento è certo ha probabilità 1, ma un evento con probabilità 1 può non essere un evento certo.

Se un evento è impossibile la probabilità pari è zero, ma un evento con probabilità nulla può essere possibile.