•) Esperimento casuale

Un esperimento casuale è formato da tre elementi:

1) Insieme S degli esiti
2) σ-algebra $\mathcal{F}$ degli eventi
3) la legge di probabilità $P(\cdot)$ degli eventi definita su $\mathcal{F}$.

Un qualsiasi esperimento casuale è completamente caratterizzato dai suddetti tre elementi.

Occorre definire, prima di tutto quali sono gli esiti (risultati dell'esperimento).

Poi occorre stabilire su quali elementi deve essere calcolata la probabilità, occorre, cioè, elencare le possibili scommesse.

Infine per ogni evento occorre conoscere la probabilità, definendo opportune regole di calcolo.

Ad esempio, se per il lancio di una moneta si assegna a TESTA la probabilità di 0,6, a CROCE occorre assegnare 0,4.

Esempio: gioco con il dado.

Se esce un numero pari vince il giocatore A.

Se esce un numero dispari vince il giocatore B.

Caratterizziamo l'esperimento casuale

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Nel gioco che si sta considerando non interessano tutte le possibili scommesse e l'insieme degli eventi può essere ridotto di molto.

Determiniamo la più piccola σ-algebra, cioè il più piccolo insieme $\mathcal{F}$ che contiene gli eventi che interessano.

$$\mathcal{F} = \{\{\emptyset\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, S\}$$

Ci sarebbero infinite leggi di probabilità da considerare. Aggiungiamo l'ipotesi che S sia equiprobabile.

La legge di probabilità discreta

$$P(\{\emptyset\}) = 0 \qquad P(S) = 1$$

$$P(\{2,4,6\}) = \frac{\#\text{ eventi elementari}}{\#\text{ ev. elem. che compongono } S} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\{1,3,5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

•) Probabilità condizionata

Partiamo da un esempio. Da un mazzo di 52 carte facciamone pescare una ad un amico, che ~~perde~~ vince se pesca l'asso di picche.

La probabilità di perdere è $\frac{1}{52}$.

Immaginiamo che il gioco si svolga su un tavolo di vetro e che si possa vedere che la carta pescata è nera, la probabilità che l'amico abbia preso l'asso di picche è pari ad $\frac{1}{26}$.

In partenza si aveva una determinata probabilità, successivamente si è reso disponibile un risultato (carta nera) che rappresenta un evento che fa cambiare la probabilità dell'evento di partenza.

In questo caso si ha una probabilità condizionata.

<u>Definizione di probabilità condizionata</u>

Siano A ed M due eventi con $P(M) \neq 0$.

La probabilità di A condizionata da M è definita con:

$$P(A\,|\,M) := \frac{P(AM)}{P(M)}$$

La barra verticale significa che A è condizionato da M.

Il simbolo $:=$ indica che è una definizione.

$P(AM)$ è la probabilità dell'evento congiunto, che si ha quando si verificano sia A sia M.

Esempio 1. Calcolare la probabilità che un dado dia un risultato ≤ 3 sapendo che il lancio è pari.

$$M = \{pari\}, \quad A = \{1, 2, 3\}$$

$$P(A \mid M) = \frac{P(AM)}{P(M)} = \frac{P(\{2\})}{P(\{pari\})} = \frac{1}{3}$$

Senza il condizionamento dell'evento M la probabilità sarebbe risultata pari a $\frac{1}{2}$.

Esempio 2. (uso diverso della definizione di probabilità condizionata)

Calcolare $P(AM)$, note $P(M)$ e $P(A \mid M)$.

Si può usare la probabilità condizionata per calcolare la probabilità di un evento congiunto.

Una scatola contiene 3 sfere bianche e 2 rosse. Si estraggono, in successione, due sfere.

Qual è la probabilità che la prima sia bianca e la seconda rossa?

Conviene definire in modo preciso ed univoco gli eventi. Siano:

$$B1 = \{prima\ sfera\ bianca\}$$
$$R2 = \{seconda\ sfera\ rossa\}$$

È richiesto di calcolare la probabilità dell'evento congiunto $(B1\ R2)$

Dalla definizione di probabilità condizionata si ha:

$$P(B1\ R2) = P(R2 \mid B1) \cdot P(B1)$$

Essendo: $P(B1) = \frac{3}{5}$ e $P(R2 \mid B1) = \frac{1}{2}$,

si ottiene

$$P(B1\ R2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

In generale, $P(AB) = P(A \mid B)\ P(B)$

•) Teorema della probabilità totale

Se $M_1, M_2, \dots, M_n$ sono eventi disgiunti, con

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = \mathcal{S}$$

allora la probabilità di A si può scrivere nel modo seguente

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid M_i)\, P(M_i)$$

Dimostrazione

$$A = A\mathcal{S} = A(M_1 + M_2 + \dots + M_n) =$$
$$= AM_1 + AM_2 + \dots + AM_n$$

Si osservi che gli AM_i sono tra loro disgiunti, essendo disgiunti gli M_i.

Quindi:

$$P(A) = P(AM_1 + AM_2 + \dots + AM_n) =$$
$$= P(AM_1) + P(AM_2) + \dots + P(AM_n) =$$
$$= P(A \mid M_1)\, P(M_1) + P(A \mid M_2)\, P(M_2) + \dots + P(A \mid M_n)\, P(M_n)$$

Si ricordi (pag. 11) che per eventi disgiunti la probabilità della somma è la somma delle probabilità.

Esempio (esame orale universitario)

Definiamo gli eventi

A = {esame superato}

M_1 = {studente interrogato dal docente}

M_2 = {studente interrogato dal ricercatore}

Si ha che

$P(A \mid M_1) = 0{,}5 \qquad P(A \mid M_2) = 0{,}70$

$P(M_1) = 0{,}8 \qquad P(M_2) = 1 - P(M_1) = \cancel{0{,}07}\ 0{,}2$

La probabilità di superare l'esame si calcola:

$$P(A) = P(A|M_1)P(M_1) + P(A|M_2)\cdot P(M_2) = 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}75 \times 0{,}2 = \cancel{0{,}75}$$
$$= 0{,}55$$

•) <u>Teorema di Bayes</u> (THOMAS BAYES 1702-1761, matematico e ministro presbiteriano britannico)

È diviso in due parti

a) $$P(M|A) = \frac{P(A|M)\,P(M)}{P(A)}$$

b) sotto le ipotesi valide per il teorema delle probabilità totali (pag. 27) si ha:

$$P(M_i|A) = \frac{P(A|M_i)\,P(M_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|M_j)\,P(M_j)}$$

<u>Dimostrazione</u>:

a) $$P(M|A) \underset{\text{(pag. 26)}}{=} \frac{P(AM)}{P(A)} = \frac{P(A|M)\cdot P(M)}{P(A)}$$

b) è sufficiente applicare il teorema della probabilità totale al denominatore della precedente formula

Il teorema di Bayes permette di rovesciare il condizionamento. Si può calcolare la probabilità di M dato A a partire dalla probabilità di A dato M.

<u>Esempio</u> di applicazione: calcolo della pericolosità dei diversi tratti autostradali.

Ci si può chiedere quale sia la probabilità di incidente in prossimità di uno svincolo, cioè la probabilità di incidente condizionata da uno svincolo. Mediante il teorema di Bayes si può scrivere

$$P(\text{incidente}|\text{svincolo}) = \frac{P(\text{svincolo}|\text{incidente})\cdot P(\text{incidente})}{P(\text{svincolo})}$$

La probabilità di incidente nei pressi di uno svincolo è calcolata sulla base della conoscenza della probabilità di svincolo sapendo che c'è stato un incidente.

La probabilità di svincolo sapendo che c'è stato un incidente è ricavabile dal numero di incidenti accaduti in zona di svincolo.

P(incidente) è ricavabile dal numero di incidenti verificatisi in un determinato intervallo di tempo (mediamente) in un dato tratto di autostrada.

P(svincolo) è l'incidenza delle zone classificate come svincolo rispetto a tutta la rete autostradale.

Il teorema di Bayes sta anche alla base di molti problemi di diagnostica.

<u>Esempio</u> (fault detection, rilevamento di guasti)

$M = \{guasto\}$ $A = \{allarme\}$

M ed A sono eventi relativi ad un determinato impianto.

- Ipotizziamo che in caso di guasto l'allarme scatta con probabilità pari a 0,9.
- Inoltre, in assenza di guasto, la probabilità di allarme è pari a 0,2.
- La probabilità di guasto è pari a 0,05.

Sapendo che è scattato l'allarme qual è la probabilità di avere effettivamente un guasto?

È richiesto di calcolare $P(M|A)$.

$P(M) = 0{,}05$ $P(A|M) = 0{,}9$

$P(A|\overline{M}) = 0{,}2$

Dal teorema di Bayes

$$P(M|A) = \frac{P(A|M) \cdot P(M)}{P(A)}$$

sono noti $P(A|M)$ e $P(M)$, ma non si cono= sce $P(A)$.

Applicando il teorema della probabilità totale,

$$P(A) = P(A|M)\,P(M) + P(A|\bar{M})\,P(\bar{M}) =$$
$$= 0{,}9 \times 0{,}05 + 0{,}2\,(1 - 0{,}05) = 0{,}235$$

Di conseguenza

$$P(M|A) = \frac{0{,}9 \times 0{,}05}{0{,}235} = 0{,}191$$

•) Indipendenza

Due eventi A e B si dicono indipendenti se la probabilità dell'evento congiunto è il prodotto delle probabilità dei singoli eventi.

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

Osservazione: se A e B sono indipendenti, lo sono anche

$$(\bar{A}, B)\ ,\ (A, \bar{B})\ ,\ (\bar{A}, \bar{B})$$

In generale, due eventi non sono indipendenti.

Se A e B sono indipendenti, dalla proprietà condizio= nata si ottiene (pag. 20)

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$$

Si può concludere che la probabilità di A non è in= fluenzata dal verificarsi o meno di B. Ciò vale anche per la probabilità di B.

$$P(B) = P(B|A)$$

Tornando al gioco con le carte (pag. 20) supponiamo che si perda se l'avversario pesca un asso, con probabilità di perdere pari a 4/52.

In questo caso non serve poter vedere il colore della carta perché che la carta pescata è nera lascia im= mutate le probabilità di perdere.

Esempio: in un'urna sono contenute 5 sfere rosse e 3 sfere blu. Le rosse sono numerate (da

1 a 5). Le blu sono numerate da 1 a 3.
Si estragga una sfera e si definiscano gli eventi seguenti

A = {estrazione di pallina rossa}

B = {estrazione di pallina n. 3 (non importa il colore)}

Gli eventi A e B sono indipendenti?

Per risolvere il quesito occorre calcolare $P(A)$, $P(B)$, e $P(AB)$

$$P(A) = \frac{5}{8} \qquad P(B) = \frac{2}{8}$$

Definiamo l'evento AB

AB = {estrazione della pallina rossa n. 3}

$$P(AB) = \frac{1}{8} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$$

Se ne deduce che A e B non sono indipendenti, potendo trarre informazioni da uno dei due eventi rispetto al verificarsi dell'altro.
Infatti, la probabilità di estrarre una pallina n. 3 è pari a $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
Se si sapesse che la pallina estratta è rossa, la probabilità scenderebbe ad $\frac{1}{5}$.

Variante: se le palline blu fossero 5, come le rosse, si avrebbe

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{1}{5}$$

$$P(AB) = \frac{1}{10} = P(A)P(B)$$

In un'urna "simmetrica" gli eventi sarebbero indipendenti.

•) Indipendenza di più eventi

Gli eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono detti indipendenti se

- sono indipendenti tutte le possibili coppie
- sono indipendenti tutte le triplette possibili
- sono indipendenti tutte le possibili quadruplette

. . . . . .

- sono indipendenti se presi tutti assieme

Sono indipendenti, se, formalmente, si ottiene che:

- $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \forall i, \forall j$, con $i \neq j$
- $P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \quad \forall i, \forall j, \forall k$, con $i \neq j \neq k$

. . . . . .

- $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n)$

Ci si può chiedere se eventi indipendenti a coppie lo siano, di conseguenza, anche a triplette, a quadruplette, ecc...

Esempio: tre eventi indipendenti a coppie, ma non se considerati tutti e tre assieme.

Consideriamo il lancio di due dadi ed i seguenti eventi

$A = \{$lancio dispari con il dado 1$\}$
$B = \{$lancio dispari con il dado 2$\}$
$C = \{$la somma dei due dadi è dispari$\}$

Gli eventi sono indipendenti a coppie infatti,

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Però, $P(ABC) = 0$, la somma di due dadi dispari dà un numero pari;

mentre $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Osservazione 1: se non c'è indipendenza la conoscenza di $P(A)$ e $P(B)$ non basta a determinare $P(AB)$.

Se interessa conoscere la probabilità dell'evento congiunto, avendo a disposizione le probabilità di A e di B si procede al prodotto delle singole probabilità, se gli eventi sono indipendenti.

Se non c'è indipendenza, occorre qualche altra informazione.

Occorre molta attenzione nello studio di eventi congiunti e produrre molti dati con esperimenti a meno che non si possa contare sull'indipendenza.

Negli esempi precedenti abbiamo verificato l'indipendenza a posteriori, a partire dalle probabilità singole.

Nella realtà occorre affrontare il problema inverso non avendo le leggi di probabilità degli eventi.

Osservazione 2: in molti casi si ipotizza l'indipendenza in base a considerazioni di tipo fisico, basandosi su fenomeni fisici che non si influenzano a vicenda.

In tal caso, $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Osservazione 3: disgiunzione e indipendenza sono concetti diversi.

Esempio: consideriamo un dado onesto ed i seguenti eventi:

$$A = \{pari\} \quad , \quad B = \{dispari\}$$

Possiamo notare che

-) A e B sono disgiunti, poiché l'intersezione è l'evento impossibile

$$AB = \{\emptyset\}$$

-) $P(AB) = P\{\emptyset\} = 0 \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Quindi A e B non sono indipendenti.

La nozione di disgiunzione è una nozione logica e precede quella di probabilità, essendo indifferente al fatto che il dado sia onesto o truccato.

La nozione di indipendenza, invece, chiama in causa la probabilità.

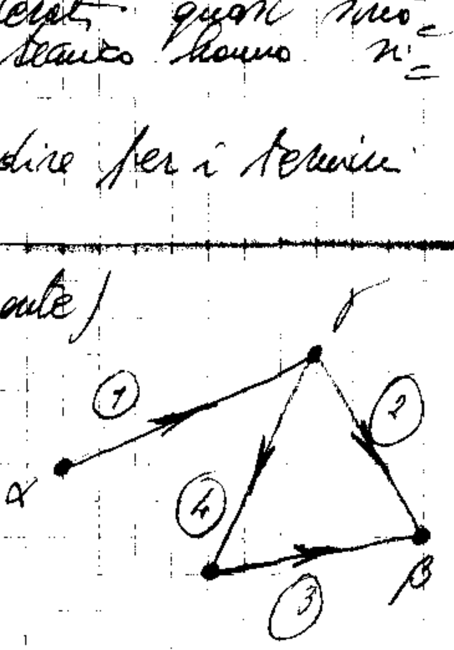
N.B. L'argomento è spesso contenuto nelle domande d'esame.

Mentre nel linguaggio italiano i termini disgiunzione e indipendenza sono usati quasi indifferentemente l'uno dall'altro e sono considerati quasi sinonimi, nel linguaggio tecnico hanno significati diversi.

La stessa cosa si può dire per i termini esito ed evento.

Esercizio (da svolgere personalmente)

Sia data una rete stradale o di telecomunicazioni composta da nodi connessi da archi.



Ogni arco ha una certa probabilità di funzionamento poiché un collegamento tra nodi può cadere.

Si chiede: qual è la probabilità che rimanga attivo il collegamento tra α e β, essendo:

p_i = probabilità di funzionamento del collegamento i.

Si fa l'ipotesi che i collegamenti funzionino in modo indipendente.

In altre parole, è richiesto di calcolare $P(A)$, con

$A = \{\alpha \text{ e } \beta \text{ sono collegati}\}$

Suggerimento: ragionare sugli eventi definendone alcuni:

$E_i = \{\text{collegamento } i \text{ funzionante}\}$

$B = \{\gamma \text{ e } \beta \text{ sono collegati}\}$

$$C_{43} = \{\text{il percorso } 4-3 \text{ è funzionante}\}$$

L'evento C_{43} implica che $P(C_{43}) = P(C_4 C_3)$.
La probabilità dell'evento C_{43} è la probabilità dell'~~evento~~ evento congiunto $C_4 C_3$.
Non necessariamente i collegamenti sono equiprobabili. La soluzione è a pag. 73.

Soluzione dell'esercizio proposto a pag. 16

$$P(A+B+C) = P[(A+B)+C] = \underline{P(A+B)} + P(C) + $$
$$- P[(A+B)C] =$$
$$= \underline{P(A) + P(B) - P(AB)} + P(C) - P(AC+BC) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC) - P(BC) +$$
$$+ P(ABC) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

N.B.: la proprietà distributiva vale anche per l'unione e l'intersezione di sezioni.

$$P[(A+B)C] = P(AC+BC)$$

•) Prove ripetute

Consideriamo un esperimento che consiste nel ripetere in modo indipendente una prova con due possibili esiti (ad esempio TESTA / CROCE).

Notazione utilizzata:

$$A_i = \{\text{evento dell'i-esima prova è un successo}\}$$

Definizione delle prove di Bernoulli(*) che si basano su due ipotesi:

(i) $P(A_i) = P(A_j) = p \qquad \forall i, j$

La probabilità di successo rimane sempre la stessa.

(*) JAKOB (o Jacques o Giacomo) BERNOULLI (1654–1705, matematico e scienziato svizzero)

(ii) gli A_i sono fra loro indipendenti, non solo a coppie, ma anche a triplette, a quadruplette, ecc...

D'ora in poi sarà

$$q = 1 - p = P(\bar{A}_i)$$

p indica la probabilità di successo e q quella di insuccesso.

Ci interessa valutare la probabilità di avere un certo numero di successi ~~su n prove~~ su n prove.

<u>Teorema</u>: la probabilità $p_n(k)$ di avere k successi su n prove di Bernoulli è data da

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

essendo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad \text{(coefficiente binomiale)}$$

Le n prove sono divise in due sottogruppi, uno di dimensione k (i successi) ed uno di dimensione $(n-k)$ (gli insuccessi).

<u>Esempio</u>: dati 4 lanci di dado, determinare la probabilità che il 6 esca 2 volte

Non interessa valutare in quali lanci esca il 6.

Determiniamo la probabilità senza utilizzare la formula, ma in via esaustiva.

Calcoliamo la probabilità che solo il primo ed il secondo lancio diano come risultato 6.

$$-\ P(d_1 = 6,\ d_2 = 6,\ d_3 \neq 6,\ d_4 \neq 6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Determiniamo la probabilità di tutte le altre possibili sequenze.

$$-\ P(d_1 = 6,\ d_2 \neq 6,\ d_3 = 6,\ d_4 \neq 6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$-\ P(d_1 = 6,\ d_2 \neq 6,\ d_3 \neq 6,\ d_4 = 6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$- P(d_1 \neq 6,\ d_2 = 6,\ d_3 = 6,\ d_4 \neq 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$

$- P(d_1 \neq 6,\ d_2 = 6,\ d_3 \neq 6,\ d_4 = 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$

$- P(d_1 \neq 6,\ d_2 \neq 6,\ d_3 = 6,\ d_4 = 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$

Per ottenere due lanci pari a 6, in 4 prove, ci sono 6 possibilità diverse.

Ciascuna delle sottosequenze ha la stessa probabilità. Esse sono tutte valide. Occorre calcolare la probabilità dell'unione delle 6 sottosequenze

I casi sono tutti disgiunti poiché al verificarsi di una sequenza, le altre sono tutte escluse.

La probabilità dell'unione dei 6 casi è la somma delle probabilità di ogni sequenza.

$$P = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 =$$
$$= 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

<u>Ciascuna sottosequenza</u> ha sempre la stessa ~~prob~~ probabilità si tratta di quantificare il numero delle sottosequenze.

<u>Il numero (6) che moltiplica</u> $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$ è il <u>coefficiente binomiale</u>.

Esso indica in quanti modi si possono collocare k successi in n prove.

Verifichiamo con la formula.

$n = 4,\ k = 2 \qquad \binom{n}{k} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 4}{\cancel{2} \cdot 2} = 6$

La cosa importante è il fatto che non si richiede di avere due successi in due determinate posizioni specifiche, bensì in due posti qualsiasi. Ciò costringe a considerare tutti i modi possibili.

Poiché tutti i modi hanno la stessa probabilità si tratta di contarli. È un caso di calcolo combinatorio risolto dal coefficiente binomiale, che evita di esplicitare tutte le possibilità.

La funzione $b_n(k)$ è detta <u>binomiale di ordine n</u>.

Essa coincide con il k-esimo termine dell'espansione ~~del binomio~~ della potenza del binomio:

$$(p+q)^n \quad \text{(binomio di Newton)}$$

Lo sviluppo del binomio comprende $(n+1)$ addendi delle potenze di p e q moltiplicati per un coefficiente che si trova nel triangolo di Tartaglia oppure rappresentato dal coefficiente binomiale.

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

<u>Proprietà</u>:
$$\sum_{k=0}^{n} b_n(k) = 1$$

Infatti, $p+q=1 \qquad q = 1-p$

$$(p+q)^n = 1^n = 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_n(k)$$

L'interpretazione è la seguente

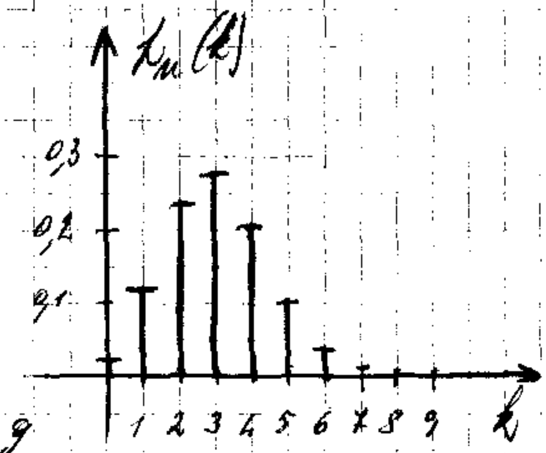
$$1 = \sum_{k=0}^{n} b_n(k) = \sum_{k=0}^{n} P(k \text{ successi})$$

1 è la sommatoria, per k che va da zero ad n, della probabilità di avere k successi.

Poiché si stanno considerando tutte le possibilità (da zero successi a tutti successi) la somma deve dare 1 (evento certo).

Costruiamo il grafico di $b_n(k)$, assumendo

$$n=9 \quad p=\frac{1}{3} \quad q=\frac{2}{3}$$



Si eseguono, cioè, 9 prove di Bernoulli con probabilità di successo pari a $1/3$.

Il numero di successi varia da 0 a 9.

Il massimo di $p_n(k)$ si ha per

$$k = k_m = \text{int}\left[(n+1)p\right]$$

Nel caso in esame

$$k_m = \text{int}\left[(9+1)\cdot\frac{1}{3}\right] = 3$$

Riportiamo i valori della funzione nel caso analizzato

$k=0 \quad p_n(k) = 0{,}026$

$k=1 \quad p_n(k) = 0{,}117$

$k=2 \quad p_n(k) = 0{,}234$

$k=3 \quad p_n(k) = 0{,}273$

ecc.

Il massimo si ha per $k=3$

$$p_n(k) = p_n(3) = \binom{9}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^6 =$$

$$= \frac{9!}{3!\,6!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^6 \simeq 0{,}273$$

<u>Esempio</u>: Si consideri una roulette questa senza lo zero. Calcolare la probabilità che il rosso esca per la prima volta al $(k+1)$esimo tentativo. Valutarla per $k=5$

Indichiamo con S_1 il numero d'ordine del primo successo.

Se ad esempio, $S_1 = 2$ il successo avviene al secondo tentativo.

Si cerca di valutare $P(S_1 = k+1)$, la probabilità che S_1 valga $k+1$.

E' un evento congiunto in cui vanno male i primi k tentativi e va a buon fine il tentativo successivo.

$$P(S_1 = k+1) =$$

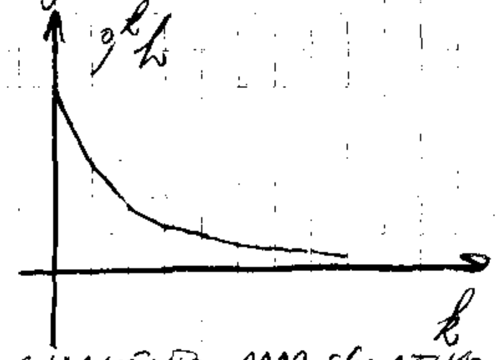
$$= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_k A_{k+1}) = \qquad \bar{A}_1 = \text{primo tentativo fallito}$$

$$= P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\dots P(\bar{A}_k)P(A_{k+1}) = \quad \text{(essendo gli eventi tutti indipendenti)}$$

$= q \cdot q \cdot \ldots \cdot q \cdot p =$ (q è la probabilità di un insuccesso)

$= q^k p$

La funzione $q^k p$ è detta *geometrica* ed è una funzione discreta.



ANDAMENTO APPROSSIMATIVO DELLA FUNZIONE $q^k \cdot p$

Nel caso che stiamo esaminando

$k = 5 \quad p = q = \frac{1}{2}$

$P(T_1 = 6) =$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} =$

$= 0{,}015625 \cong 1{,}6\%$

Esempio (dei ritardi)

Si calcoli la probabilità che alla roulette il rosso esca al $(k+1)$ esimo tentativo, sapendo che nei k tentativi è sempre uscito il nero.

È un caso di *probabilità condizionata*.

Nel caso precedente la scommessa era fatta a priori: si puntava sul fatto che il rosso sarebbe uscito per la prima volta al $(k+1)$ esimo tentativo.

Nel caso attuale la scommessa è fatta dopo k giri e si sa che essi hanno sempre fatto uscire il nero.

Prima si scommetteva *prima* dei 21 lanci e la scommessa riguardava tutti i $(k+1)$ lanci.

Ora si scommette sul 21esimo lancio *dopo* aver conosciuto l'esito dei primi 20 lanci.

È un caso tipico di probabilità condizionata: si ~~scom~~ scommette sul 21esimo lancio *sapendo* che i primi venti lanci hanno dato come esito il nero.

$P(T_1 = k+1 \mid T_1 > k) =$

$$= \frac{P(S_1 = k+1 \, , \, S_1 > k)}{P(S_1 > k)} =$$

La virgola al numeratore indica due eventi congiunti.

$$= \frac{P(S_1 = k+1)}{P(S_1 > k)} =$$

L'intersezione di $S_1 = k+1$ e $S_1 > k$ è data da $S_1 = k+1$

~~Se $S_1 > k$~~ Se $S_1 = k+1$ è automatico che $S_1 > k$

$$= \frac{q^k p}{P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_k)} =$$

Se $S_1 > k$ i primi k tentativi sono stati tutti insuccessi.

$$= \frac{q^k p}{P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_k)} =$$

$$= \frac{q^k p}{q^k} = p$$

Si vede che essendo $p = \frac{1}{2} = q$, affidarsi ai ritardi è solo superstizione.