LEZIONE (3) 16/03/09

VARIABILI CASUALI

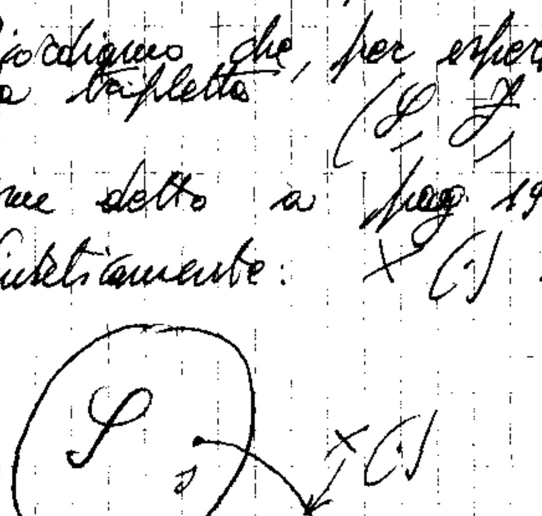
•) Definizione

-) informale: un esperimento casuale dà come esito un numero reale

-) formale: è una funzione $X(\cdot)$ che, ad ogni esito $s \in \mathcal{S}$ di un esperimento casuale, associa un numero reale.

Ricordiamo che, per esperimento casuale, si intende la tripletta $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P(\cdot))$ come detto a pag 19.

Sinteticamente: $X(\cdot): \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}^1$



$X(\cdot)$ è una funzione che ha come dominio $\mathcal{S}$ e produce valori su $\mathbb{R}^1$.

Simboli del grafico:

$\mathcal{S}$ = insieme degli esiti

s = singolo esito

$X(\cdot)$ = legge matematica

$X(s)$ = valore che assume la funzione $X(\cdot)$ quando viene applicata ad s.

Le variabili casuali verranno indicate con lettere maiuscole. Nei testi appaiono, di solito, in grassetto.

Esempio: (moneta)

Se l'esito è TESTA $(s = \{T\})$ si definisce
$$X(s) = 1$$
se l'esito è CROCE $(s = \{C\})$ si definisce
$$X(s) = -1 \quad (\text{oppure } 0)$$

L'idea che sta alla base del suddetto procedimento consiste nell'evitare di lavorare con le triplette

$$(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot))$$

riducendo tutto in termini di numeri reali.

Si lavorerà sempre in $\mathbb{R}^1$ a prescindere dalla natura dell'esperimento.

•) <u>Funzione di distribuzione</u>

Una variabile casuale $X(\cdot)$ possiede una funzione di distribuzione (d'ora in poi f.d.d.)

se esiste una funzione $F_X(x)$, che gode delle seguenti proprietà:

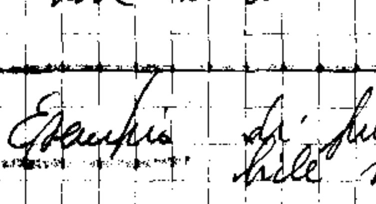
1) $F_X(x) = P(X \leq x)$

2) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

3) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

La caratteristica fondamentale di una f.d.d. è data dalla proprietà 1.

Esempio di punto t scelto in modo equiprobabile nell'intervallo $[a, b]$



Supponiamo che un amico ci preannunci una <u>telefonata</u> tra le 9 e le 10.

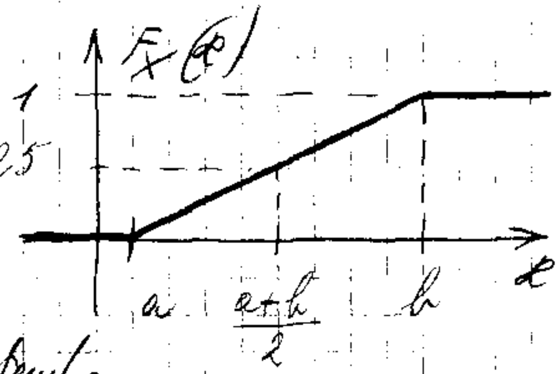
t è l'istante in cui squillerà il telefono.

In assenza di altre informazioni, ipotizziamo che la telefonata appartenga allo spazio degli esiti tra le 9 e le 10 che gode della proprietà di essere equiprobabile.

In altre parole, tutti gli istanti di tempo tra le 9 e le 10 sono equiprobabili.

Definiamo una variabile casuale ponendo $X = t$

Determiniamo $F_X(x)$



- se $x < a$:

$F_X(x) = P(X \le x) = 0$

se x è un istante di tempo antecedente le 9, la telefonata non arriva.

- se $x > b$

$F_X(x) = P(X \le x) = 1$

se x è un istante posteriore alle 10, la telefonata è sicuramente arrivata

- se $x = \frac{a+b}{2}$ $\quad (x = 9^h 30^m)$

$F_X(x) = P(X \le x) = \frac{1}{2}$

- se $x = 9^h 15^m \Longrightarrow F_X(x) = \frac{1}{4}$

- se $x = 9^h 45^m \Longrightarrow F_X(x) = \frac{3}{4}$

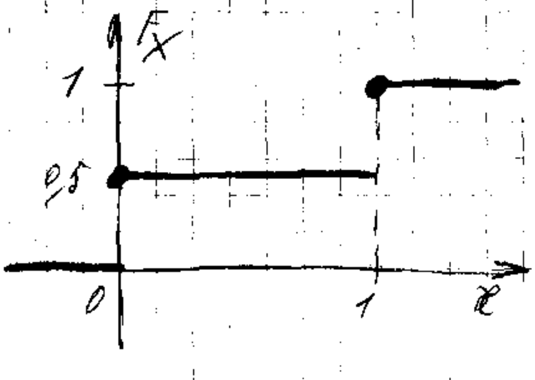
Si può concludere che tra a e b la $F_X(x)$ è lineare ed ha l'aspetto di una rampa.

La funzione $F_X(x)$ è detta anche <u>probabilità cumulativa</u>.

Pertanto, la funzione non definisce la probabilità in un punto ma in un intervallo.

Esempio (moneta onesta)

Definiamo $X(\{T\}) = 1$ $\qquad X(\{C\}) = 0$



Definiamo la f.d.d.

- $x < 0 \Rightarrow F_X(x) = P(X \le x) = 0$

~~$x \geq 0$~~

- $x > 1 \Rightarrow F_X(x) = P(X > x) = 1$

$- x = 0 \Rightarrow F_X(x) = P(X \leq 0) = \frac{1}{2}$

$- x = 0{,}6 \Rightarrow F_X(x) = P(X \leq 0{,}6) = \frac{1}{2}$

La probabilità è pari a 0.5 per tutti i punti dell'intervallo che va da zero (compreso) fino ad 1 (escluso).

È una funzione a scalini (discontinua).

I pallini indicano quale sia il valore da considerare nei punti di discontinuità. Si considera il valore destro.

La funzione è "continua da destra" e ciò è conseguenza del fatto di abbiamo considerato

$P(X \leq x)$ e non $P(X < x)$

In quest'ultimo caso, la funzione sarebbe stata "continua da sinistra".

•) Proprietà

-) $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ monotonia

-) $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x)$

-) $F_X(x^+) = F_X(x)$ continuità da destra

-) $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

-) $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$

La prima proprietà indica che la f.d.d è monotona non decrescente

La seconda indica che la probabilità che la variabile casuale assuma valori che cadono a destra di un determinato valore e può essere calcolata in funzione della probabilità che la variabile assuma valori che appartengono all'intervallo di sinistra.

La quarta proprietà definisce la probabilità che la variabile casuale assuma valori compresi in un intervallo limitato.

La quinta proprietà indica che

$$P(X=x) = 0$$

in tutti i punti di continuità di F_X (si veda a pag. 16 cardinalità infinita).

Considerando le proprietà 4 e 5 si possono calcolare le probabilità di tutti gli intorni di segmenti e punti dell'asse reale.

Conseguenza delle proprietà: la f.d.d. è sufficiente a descrivere in maniera completa una variabile casuale dal punto di vista probabilistico.

Terminologia

-) si dice che la variabile casuale X è di tipo continuo se la $F_X(x)$ è continua, come nel caso della telefonata.

-) la variabile casuale X è discreta se la $F_X(x)$ è a scalini (esempio della moneta).

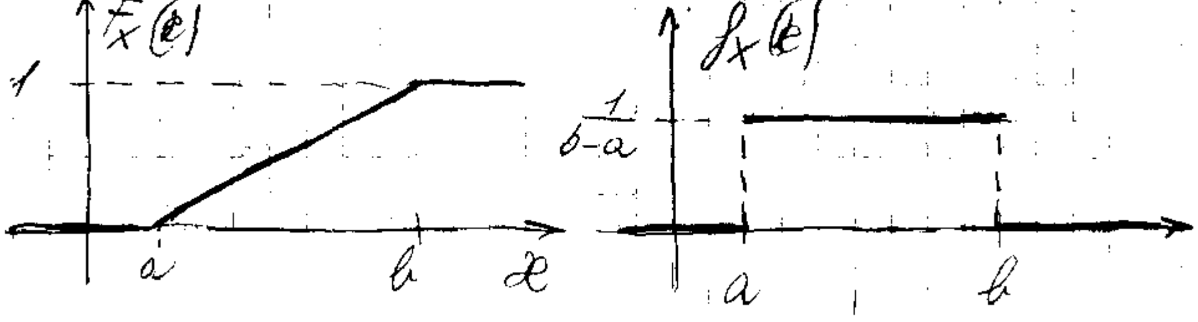
-) negli altri casi la variabile casuale X si dice di tipo misto: in essi la f.d.d. presenta delle discontinuità, ma nelle altre zone non rimane costante.

-) Densità di probabilità (d.d.p.)

Questa funzione è così definita:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

La derivata della f.d.d. rispetto ad x ~~detta~~ è detta d.d.p. della variabile casuale X.



I grafici della pagina precedente si riferiscono all'esempio della telefonata t, con

$$t \in [a, b]$$

La costanza della d.d.p. in $[a, b]$ mostra l'equiprobabilità di tutti gli "esiti" (istanti in cui avviene la telefonata).

Dai grafici si nota anche che la d.d.p. è la derivata della d.d. mentre quest'ultima è l'integrale della d.d.p.

Analizziamo l'esempio della moneta onesta di pag. 39.

Eccettuati i punti di discontinuità la derivata è sempre nulla mentre nei punti di discontinuità la funzione non è derivabile.

Determiniamo il modo di calcolare la derivata in questi punti. Occorre definire la Delta di Dirac

•) <u>Delta di Dirac</u> (cenni) [PAUL ADRIEN MAURIC DIRAC 1902-1984, fisico e matematico britannico tra i fondatori della fisica quantistica]

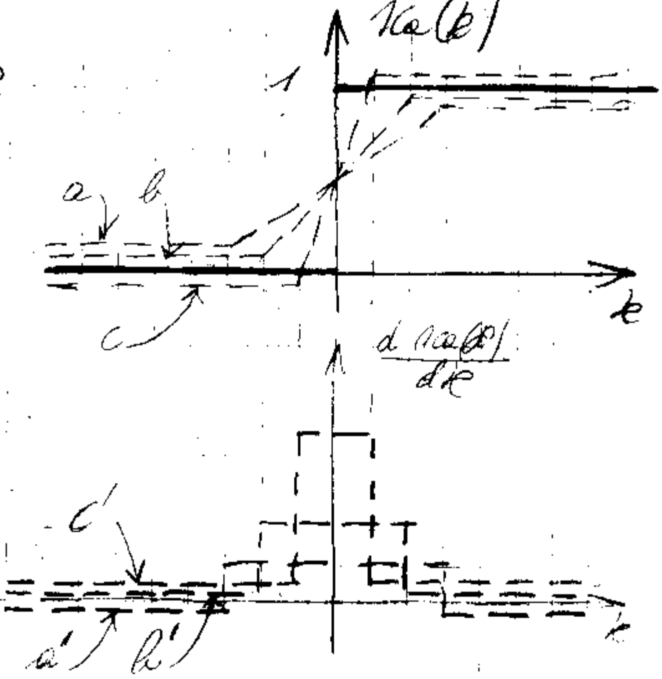
Non è una funzione bensì una funzione <u>generalizzata</u> o <u>distribuzione</u>.

-) <u>derivata dello gradino</u>

al posto della funzione $u_a(t)$ consideriamo le funzioni tratteggiate a, b, c che sono rampe sempre più ripide.

Le derivate (a', b', c') sono indicate nel grafico sotto a quello dello scalino.

Esse sono tutti impulsi rettangolari.



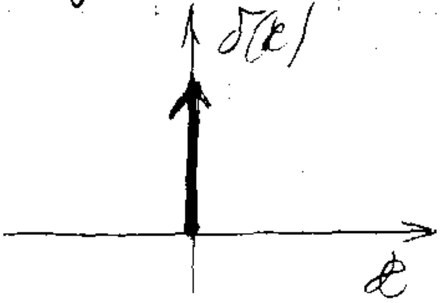
Man mano che la funzione diviene più ripida, la base dell'impulso diminuisce, mentre l'altezza aumenta.

Gli impulsi sono tutti di area unitaria.

Si può in un certo senso immaginare che la derivata dello scalino sia un impulso rettangolare di grandezza infinitesima (ε) e di altezza $1/\varepsilon$ in modo che l'area rimanga unitaria.

Ciò vale nel punto di discontinuità, poiché negli altri punti la derivata è nulla essendo la funzione $sca(x)$ costante.

Quanto esposto non è corretto dal punto di vista matematico poiché non esiste nel mondo delle funzioni.



Generalizzando il concetto delle funzioni ed introducendo le distribuzioni l'oggetto descritto esiste e prende il nome di delta di Dirac.

La rappresentazione schematica è realizzata mediante una freccia ed indica un oggetto ovunque nullo tranne che nell'origine, dove si deve immaginare un impulso rettangolare di base nulla, di altezza infinita ed area unitaria.

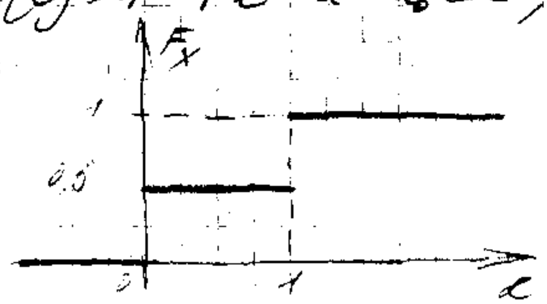
N.B.: l'oggetto descritto esiste solo nel mondo delle distribuzioni.

Proprietà della delta di Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = g(x_0)$$

In particolare, ponendo $g(x)=1\ \forall x$ e $x_0=0$, si ottiene

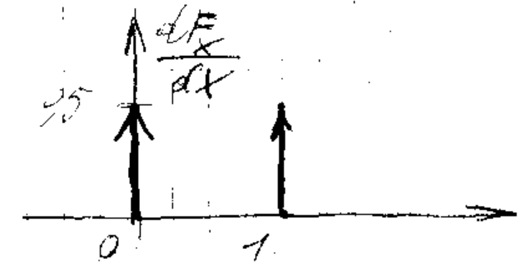
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) = 1$$



Riprendendo l'esempio della moneta (pag. 39) si ottiene

$$F_X(x) = 0,5\ sca(x) + 0,5\ sca(x-1)$$

$$f_X(x) = 0,5\ \delta(x) + 0,5\ \delta(x-1)$$



In sintesi, laddove è presente una discontinuità a scalino, nella derivata si trova una delta di Dirac, con area pari all'ampiezza dello scalino.

Dall'ultimo grafico si comprende che si hanno probabilità pari al 50% per $x=0$ e $x=1$ e nessuna probabilità al di fuori di questi valori.

Dal grafico della F_X, invece, si deduce che nei tratti ~~in~~ su cui la f.d.d. è costante ~~non si~~ si ha una probabilità pari a zero, mentre, nei punti in cui si ha un salto, l'ampiezza del salto fornisce la probabilità di aver quel valore x.

•) <u>Proprietà della d.d.p.</u>

-) $f_X(x) \geq 0$

-) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\,d\alpha$

la f.d.d. si può ottenere come integrale della d.d.p. essendo questa la derivata della prima

-) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

l'area sottesa dalla d.d.p. è sempre unitaria

-) $P(x_1 < X \le x_2) = \int_{x_1^+}^{x_2^+} f_X(x)\,dx$

la probabilità che la X assuma valori compresi tra x_1 e x_2 è data dall'area evidenziata.

-) la d.d.p. può essere vista come rapporto incrementale

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x^-)}{\Delta x}$$

Conseguenza: anche la d.d.f. è sufficiente a caratterizzare completamente le proprietà probabilistiche della variabile casuale X.
In altre parole si possono calcolare le probabilità di tutti gli eventi che interessano, conoscendo la tripletta

$$(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P(\cdot))$$

Inoltre la f.d.d. e la d.d.f. sono funzioni intercambiabili: nota l'una si può ricavare l'altra con operazioni di integrazione o di derivazione.

Dal punto di vista didattico la d.d.f. è più immediata da comprendere ed utilizzare, soprattutto nel caso di intervalli equiprobabili, essendo la funzione costante.

D'altra parte per calcolare delle probabilità occorre operare con

$$\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx$$

nel caso interessi sapere qual è la probabilità che una variabile casuale X assuma valori compresi in un intervallo

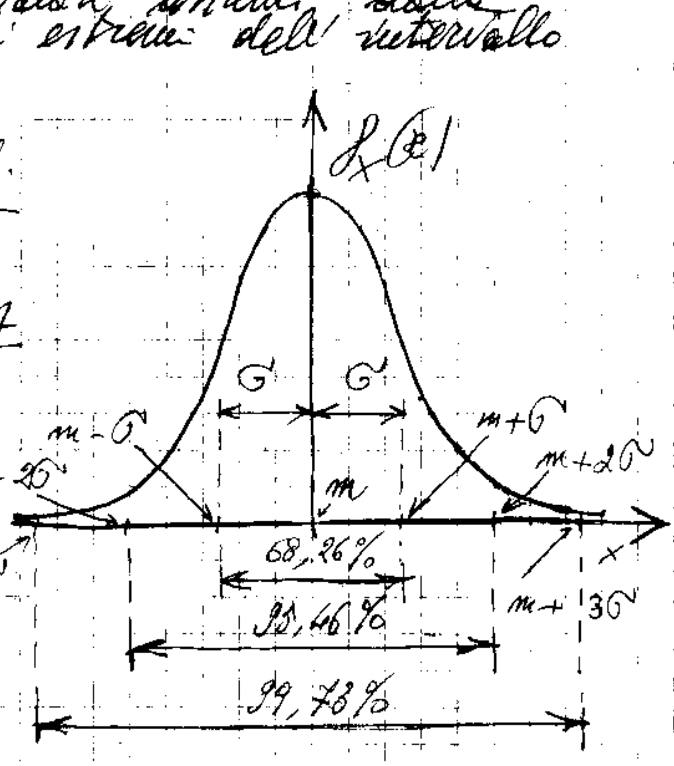
$$[x_1, x_2]$$

Il calcolo dell'integrale può essere complesso, ma, conoscendo la f.d.d., il risultato è dato dalla differenza dei valori assunti dalla primitiva (f.d.d.) negli estremi dell'intervallo di integrazione.

a) Variabili casuali notevoli

-) Distribuzione GAUSSIANA (o NORMALE)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



La Gaussiana è caratterizzata dai parametri m e σ.

Ha una tipica forma a campana centrata attorno ad m.

Il valore di σ influisce sulla larghezza della campana, che è tanto maggiore quanto maggiore è il valore di σ.

Nell'intervallo $[m-\sigma, m+\sigma]$ cade un'area pari al 68,26% di quella totale.

Nell'intervallo $[m-2\sigma, m+2\sigma]$ l'area è pari al 95,46%.

Nell'intervallo $[m-3\sigma, m+3\sigma]$ cade il 99,73% dell'area totale.

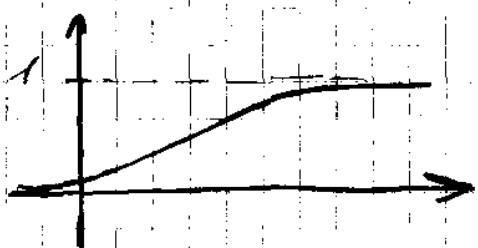
Per convenzione si ritiene che nell'intervallo

$$[m-3\sigma, m+3\sigma]$$

cada la totalità dell'area, per la maggior parte delle applicazioni.

La f.d.d. $F_X(x)$ non esiste in forma chiusa, poiché l'integrale è difficile da calcolare (o impossibile).

I valori di F_X sono riportati in forma tabellare sui libri di statistica.



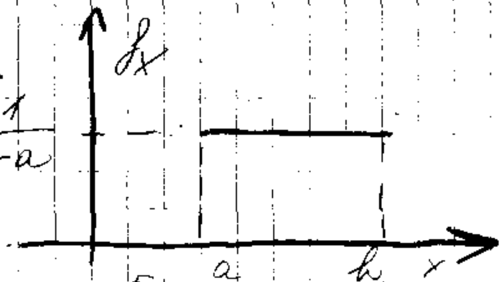
Nel grafico è rappresentata la forma tipica della F_X.

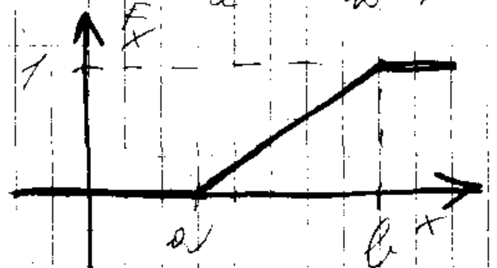
–) Variabile Casuale Uniforme

È il caso della telefonata che può arrivare in un qualsiasi istante compreso nell'intervallo

$[a, b]$

essendo tutti gli istanti equiprobabili.

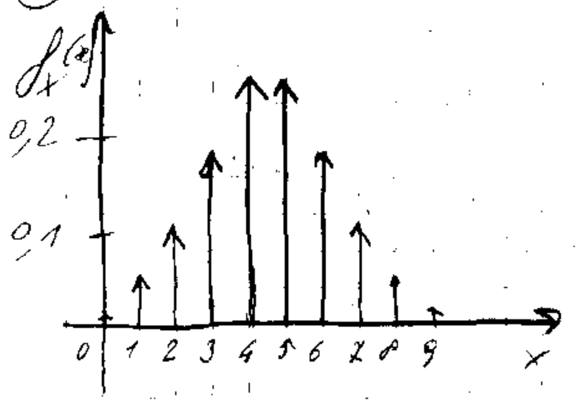




La $f_X(x)$ ha la seguente forma

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \le x \le b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

-) Variabile casuale binomiale di ordine n



La Binomiale si ha quando X è pari al numero di successi su n prove di Bernoulli.

X = # successi su n prove di Bernoulli.

Il grafico rappresenta il caso in cui

n = 9   p = q = 0,5   (caso della moneta onesta)

N.B.: il grafico è approssimativo.
La densità di probabilità è nulla dappertutto ad eccezione dei valori interi da 0 a 9 (compresi).
La funzione è formata da 10 Delte di Dirac, con area diversa le une dalle altre.
L'area è maggiore in corrispondenza al numero più probabile di successi.
Analiticamente:

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot \delta(x-k)$$

L'area del k-esimo impulso è dato da

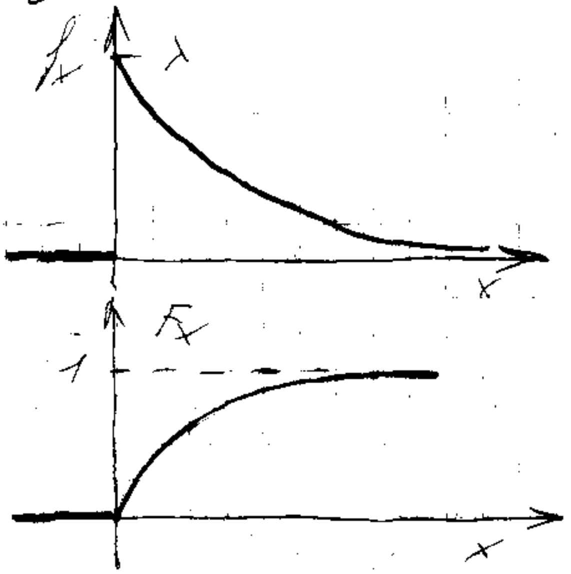
$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

I valori delle aree sono rappresentati nella tabella a destra.

n	area
0 - 9	0,0020
1 - 8	0,0176
2 - 7	0,0703
3 - 6	0,1641
4 - 5	0,2461

Il termine $\delta(t-k)$ rappresenta l'impulso traslato di k unità.

-) Variabile casuale esponenziale



$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Per integrazione si ottiene F_X

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

La variabile casuale esponenziale può servire per descrivere tempi di attesa tra eventi.
Si noti che la probabilità è nulla per tempi di attesa negativi.

•) Stima della d.d.p. (tramite istogramma)

Supponiamo di lavorare con variabili casuali associate ad esperimenti i cui risultati sono numeri reali.

Immaginiamo di non conoscere le funzioni f_X e F_X e di raccogliere dati cercando di capire quale possa essere la distribuzione probabilistica.

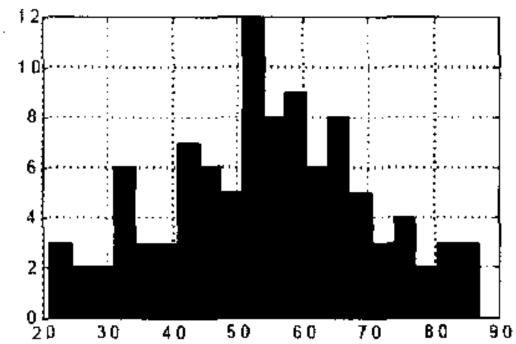


diagramma 48/A

Una procedura molto semplice consiste nel costruire l'istogramma nel modo seguente.

Si abbiano n repliche indipendenti della variabile casuale di cui interessa conoscere la d.d.p.

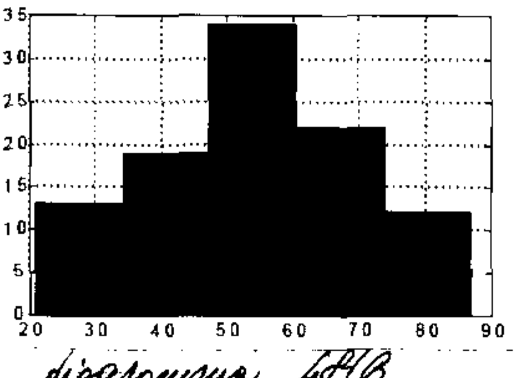


diagramma 48/B

Indichiamo le repliche con $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Per repliche indipendenti si intende il fatto che non è possibile prevedere un valore della misura sulla conoscenza degli altri valori.

Si divide l'asse x in intervalli ~~"bins"~~ (BINS) e si contano quante osservazioni cadono in ciascun intervallo, costruendo un grafico a barre (diagramma 49/A di pag. 49).

Nel grafico si possono contare 20 intervalli, ciascuno dei quali ha un'altezza proporzionale al numero di osservazioni che cadono in quel bin.

Ad esempio, nell'intervallo 22-24 cadono 3 osservazioni.

I 100 dati relativi al diagramma sono stati estratti da una Gaussiana. La densità di probabilità avrebbe dovuto essere a campana.

Ciò capita quando i bins sono troppo stretti e i dati poco numerosi.

Per rimediare all'inconveniente si riduce la risoluzione, aumentando la larghezza dei ~~bins~~ bins.

Nel diagramma 49/B i bins sono stati ridotti a 5.

Aumentano le osservazioni relative a ciascun bin.

Ad esempio, nell'intervallo 21-34 cadono 13 osservazioni.

Anche in questo caso la Gaussiana non è riprodotta in modo soddisfacente.

La scelta ottimale del numero dei bins si dovrebbe basare sulla forma della densità. Se la d.d.p. è rappresentata da una funzione molto piatta e regolare si possono usare pochi bins.

In caso di forma molto frastagliata si devono usare molti bins per meglio rappresentarla.

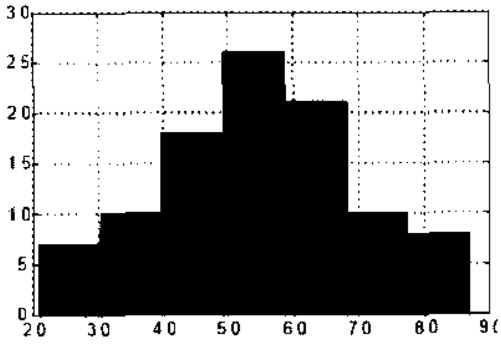


diagramma 49/A

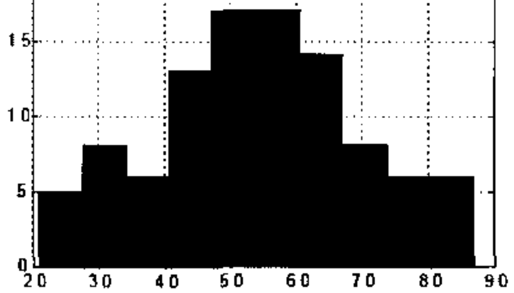


diagramma 49/B

L'istogramma, però, si esegue proprio per capire come è fatta la d.d.p.

Si possono applicare regole empiriche, come quella della potenza del 2, secondo la quale si dovrebbe assumere un numero di bins pari al logaritmo in base 2 del numero dei dati.

Nel caso nostro, i dati sono 100

$$\log_2 100 = 6{,}64386 \longrightarrow 7$$

Il risultato ottenuto assumendo 7 bins è rappresentato nel diagramma A di pag. 48.

La mancanza di simmetria dell'istogramma è anche dovuta alla scarsità dei dati disponibili.

Alcuni studiosi consigliano la regola della radice, secondo cui il numero dei bins è dato dalla radice del numero dei dati (diagramma B di pag. 48), in cui i bins sono 10.

•) Distribuzione e densità condizionate

Si consideri un evento M con $P(M) \neq 0$. Si definisce distribuzione condizionata

$$F_{X|M}(x|M) = P(X \leq x|M) = \frac{P(X \leq x, M)}{P(M)}$$

Si definisce, invece, densità condizionata

$$f_{X|M}(x|M) = \frac{d F_{X|M}(x|M)}{dx}$$

–) Teorema della probabilità totale

Vale sotto l'ipotesi che dati n eventi A_i disgiunti, valga la condizione

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = S$$

Si ottiene

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{n} F_{X|A_i}(x|A_i) \cdot P(A_i)$$

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X|A_i}(x|A_i) \cdot P(A_i)$$

• **Funzioni di variabile casuale**

Data una variabile casuale X ed una funzione $g(\cdot)$,

$$Y = g(x)$$

è una nuova variabile casuale.

Considerando la corrente che attraversa un resistore, si sa che la potenza dissipata vale

$$P = RI^2$$

In questo caso, se la corrente I è una variabile casuale, lo è anche la potenza dissipata.

Ci poniamo l'obiettivo di ricavare le proprietà della funzione di variabile casuale a partire da quelle della variabile casuale originale.

Occorre porre attenzione al fatto che non tutte le funzioni di variabile casuale sono lecite.

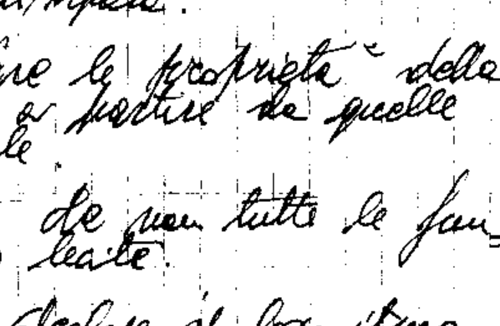
Ad esempio, non si potrebbe calcolare il logaritmo di una Gaussiana, essendo questa definita da $-\infty$ a $+\infty$.

Esempio: calcolo della f.d.d. di $Y = g(x)$, essendo

$$g(x) = X^2$$

ed X sia una variabile casuale uniforme nell'intervallo

$$[0, 1]$$



In base alla definizione di f.d.d., si ha

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) =$$
$$= P(X^2 \leq y)$$

in base al fatto che $Y = X^2$

Consideriamo due casi, a seconda del segno di y

1) $y \geq 0$

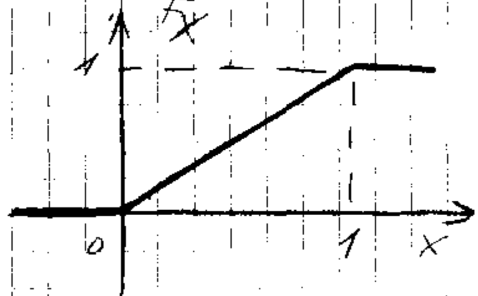
$$P(X^2 \le y) = P(0 \le X \le \sqrt{y})$$

non si è scritto $P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$ poiché valori negativi di X hanno probabilità nulla.

Si ottiene $P(X^2 \le y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(0)$

Occorre valutare la $F_X(x)$ negli estremi dell'intervallo.

Il grafico della F_X si ricava da quello della f_X della pagina precedente.



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Osservando che $F_X(0) = 0$ si ricava

$$P(X^2 \le y) = F_X(\sqrt{y})$$

2) $y < 0$

non esistono valori di X tali che

$$X^2 < y \Rightarrow F_Y(y) = 0$$

Si conclude che

$$F_Y(y) = P(X^2 \le y) = 0$$

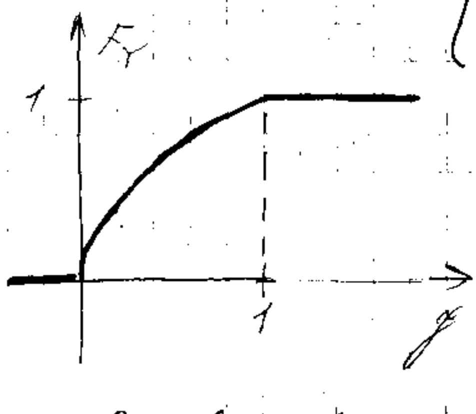
$X^2 \le y$ rappresenta un evento impossibile.

In conclusione:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0 \\ F_X(x) = F_X(\sqrt{y}), & \text{se } y \ge 0 \end{cases}$$

A sua volta la $F_X(x)$ si sdoppia, come visto sopra. Perciò

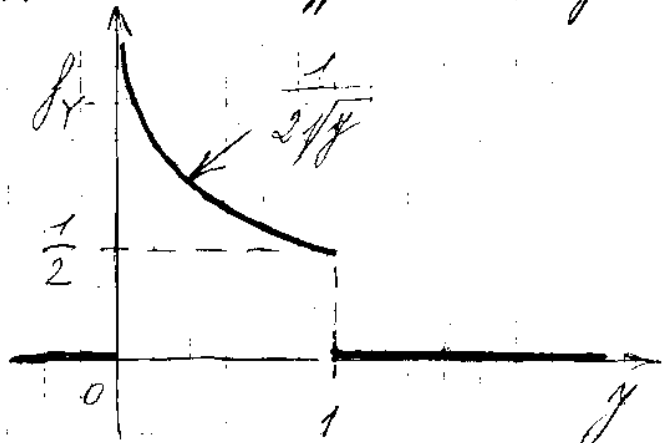
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y<0 \\ \sqrt{y} & \text{se } 0\le\sqrt{y}\le 1 \Rightarrow 0\le y\le 1 \\ 1 & \text{se } \sqrt{y}>1 \Rightarrow y>1 \end{cases}$$



La funzione risulta divisa in tre rami.
Il primo a sinistra non interessa perché riguarda i valori di y negativi che non si possono avere.

Gli altri due rami riguardano i valori positivi di y (e di x).

Si noti la cuspide in $y=1$ della F_Y che si traduce in una discontinuità nel grafico di f_Y.



Riflessioni finali:
L'esercizio richiedeva di calcolare $F_Y(y)$ ed $f_Y(y)$ a partire dalla conoscenza della d.d.p. $f_X(x)$.

È stato necessario ricondurre il calcolo di $F_Y(y)$ ad una formula contenente $F_X(x)$ nota o comunque ricavabile dalla conoscenza di $f_X(x)$.
Si è partiti da una funzione $f_X(x)$ uniforme e definendo una variabile casuale

$$Y = X^2$$

si ottiene una $f_Y(y)$ non uniforme nel tratto $[0, 1]$.

•) Calcolo della densità di probabilità di una variabile casuale $Y = g(X)$
Si potrebbe procedere come nell'esempio precedente, calcolando la

$$F_Y(y)$$

e poi derivandola.

Esiste una strada diretta fornita dal

__Teorema__: sia X una variabile casuale continua e $g(x)$ una funzione continua, derivabile con derivata prima uguale a zero solo in punti isolati.

Ciò significa che non ci sono tratti orizzontali di lunghezza finita.

Dette $x_1(y), x_2(y), \ldots, x_n(y)$, le radici dell'equazione

$$y = g(x)$$

nell'incognita x, la d.d.p. $f_Y(y)$ è data da

$$f_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} \\ 0, \text{ se non esistono radici di } y = g(x) \end{cases}$$

__Nota:__ di solito, negli esercizi si ha una sola soluzione, per cui la sommatoria non verrà quasi mai richiesta.

Esempio Si consideri $Y = e^X$, essendo X una Gaussiana.

Determinare $f_Y(y)$.

1) $y \leq 0$. Non esistono radici, in quanto non c'è un valore di x che renda negativa la funzione e^x.

Applicando il teorema, $f_Y(y) = 0$

2) $y > 0$. Esiste una sola radice x_1, tale che

$$x_1 = \ln y$$

Inoltre, essendo $g(x) = e^x$,

$$g'(x) = e^x = y$$

In conclusione, si ottiene

$$f_Y(y) \begin{cases} 0 & \text{se } y<0 \\ \dfrac{f_X(x)}{|g'(x)|} = \dfrac{f_X(\ln y)}{|e^{\ln y}|} & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$$

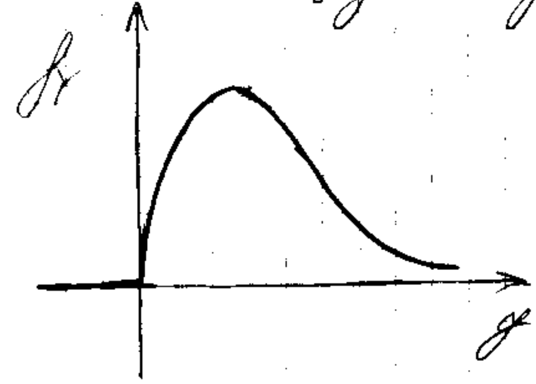
Ricordando che $e^{\ln y} = y$ e che la $f_X(x)$ di una gaussiana è

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

si ottiene per $y \geq 0$

$$f_Y(y) = \frac{1}{y}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Si ottiene il seguente grafico (e la funzione ~~sta~~ prende il nome di <u>lognormale</u>)



La distribuzione gaussiana o normale è definita da $-\infty$ a $+\infty$.

La lognormale ha una forma più sensata e si ottiene con l'esponenziale di una gaussiana e non con il logaritmo di una gaussiana.

La lognormale ~~verifica~~ verifica che il suo logaritmo è normale, ricordando che "normale" è sinonimo di gaussiana.