LEZIONE 5 30/03/09

Esercizio 2 del foglio distribuito (automobilista indisciplinato)

Definiamo gli eventi:

$A_i = \{\text{multa all'i-esimo giorno}\}$

$B = \{\text{si evita la multa } k \text{ giorni di seguito}\}$

Siano: - x_k = probabilità di evitare la multa k giorni di seguito.

- $p = 0{,}001$, probabilità di essere multato

Ogni volta che l'automobilista commette un'infrazione, in effetti esegue una prova di Bernoulli.

La possibilità di essere multati è un evento che è indipendente da tutti gli eventi precedenti e successivi, almeno in prima approssimazione.

$$B = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_k$$

Si evita la multa k giorni di seguito se sono falsi gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Gli eventi $A_1, A_2 \ldots A_k$ devono essere falsi contemporaneamente, cioè tutti insieme.

$$P(B) = p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2) \cdots p(\bar{A}_k)$$

$$P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999 \quad \forall i$$

$$P(B) = \underbrace{0{,}999 \times 0{,}999 \times \ldots \times 0{,}999}_{k \text{ fattori}} = 0{,}999^k = x_k$$

Imponiamo che x_k sia uguale a $0{,}5$

$$0{,}999^k = 0{,}5$$

$$k \ln 0{,}999 = \ln 0{,}5$$

$$k = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}999} = 693$$

Nel caso che $x_k = 0{,}05$, si ottiene

$$0{,}999^k = 0{,}05$$

$$k = \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}999} = 2996$$

Variante dell'esercizio:

supponendo di commettere l'infrazione n giorni di seguito, quante multe prendere in media l'automobilista?

Occorre considerare la Binomiale. Il valor medio è dato da

$$E[X] = np \qquad \text{(Pag. 69)}$$

Il valor medio è dato dal numero di tentativi moltiplicato per la probabilità di successo.

Se $n = 1000$, si ha:

$$E[X] = 1000 \times 0{,}001 = 1$$

Se $n = 2996$,

$$E[X] = 2996 \times 0{,}001 = 3$$

Esercizio n. 3 del foglio distribuito (emofilia)

1/ Calcolare la probabilità che la signora X sia portatrice del gene dell'emofilia, sapendo che ha avuto due figli sani.

Occorre considerare la probabilità condizionata.

La signora X ha il 50% di probabilità a priori di essere portatrice del gene, ma ci sono informazioni aggiuntive, quelle relative ai primi due maschi sani.

Definiamo gli eventi

$X = \{$la signora X è portatrice$\}$

$S_2 = \{$i primi 2 figli maschi sono sani$\}$

78 Si richiede di calcolare la probabilità di X dato S_2.

$$P(X \mid S_2)$$

Occorre utilizzare il teorema di Bayes (pag. 23), come spesso succede in indagini diagnostiche.

$$P(X \mid S_2) = \frac{P(S_2 \mid X) \cdot P(X)}{P(S_2)}$$

Il teorema di Bayes, talvolta, è anche detto <u>teorema delle probabilità delle cause</u>.

Si sta cercando la probabilità di una causa: il fatto che la signora X sia portatrice o non portatrice e le cause che può portare ad avere figli sani o malati.

Il teorema di Bayes ribalta i condizionamenti: ci troviamo a calcolare la probabilità di avere figli sani (effetto) sapendo che la signora è portatrice (causa), seguendo la giusta logica temporale.

$P(X) = 0{,}5$, avendo la signora X ereditato il gene dalla madre con probabilità 0,5.

$P(S_2 \mid X) = 0{,}5^2$. È la probabilità di avere due figli sani essendo portatrice del gene. Si tratta di calcolare la probabilità di avere due successi in due prove di Bernoulli (pag. 31).

$P(S_2)$ è la probabilità (non condizionata) di avere due figli sani.

Nella versione b) il denominatore del teorema di Bayes viene espanso con il teorema della probabilità totale (pag. 23).

$$P(S_2) = P(S_2 \mid X) \cdot P(X) + P(S_2 \mid \bar{X})\, P(\bar{X})$$

$P(S_2 \mid \bar{X}) = 1$. La probabilità di avere due figli sani sapendo di non essere portatrice del gene è 1.

$P(\bar{X}) = 0{,}5 \qquad P(\bar{X}) = 1 - P(X) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

Quindi:

$$P(S_2) = 0{,}5^2 \times 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}625 = \frac{5}{8}$$

Infine:

$$P(X/S_2) = \frac{0,5^2 \times 0,5}{0,625} = 0,2 = \frac{1}{5}$$

Avendo avuto due figli sani, la probabilità di essere portatrice, che all'inizio era pari a 0,5, ora è diventata 0,2.

---

2) Calcolare la probabilità che il 3° figlio sia ammalato di emofilia.

Introduciamo l'evento:

$M_3 = \{3°$ figlio è emofiliaco$\}$

Si deve calcolare $P(M_3 / S_2)$

Applichiamo il teorema delle probabilità totali.

$$P(M_3/S_2) = P(M_3/X, S_2) \cdot P(X/S_2) + P(M_3/\bar{X}, S_2) \cdot P(\bar{X}/S_2)$$

Trascurando S_2, la formula assume la forma classica

$$P(M_3) = P(M_3/X) \cdot P(X) + P(M_3/\bar{X}) \cdot P(\bar{X})$$

Occorre, però, considerare anche il condizionamento rispetto ad S_2. Non si può trascurare il fatto che S_2 è accaduto.

Non si scrive $P(M_3/X/S_2)$, ma si usa scrivere

$$P(M_3/X, S_2)$$

Non si usano condizionamenti in cascata. Il condizionamento si menziona nascosto, in "background".

$P(M_3/X, S_2)$ è la probabilità di avere un 3° figlio ammalato sapendo che la signora è portatrice e che ha avuto due figli sani, ho che conta è ~~sapere che la~~ considerare se la signora è portatrice o meno.

Perciò, $P(M_3/X, S_2)$ è in effetti $P(M_3/X)$.

Inoltre $P(M_3/\bar{X}, S_2) = 0$: se la signora non è portatrice, la probabilità di avere un figlio ammalato è nulla.

Si ottiene $P(M_3) = P(M_3/X) \cdot \cancel{P(X)} \; P(X/S_2) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$

80 Esercizio 4 del foglio distribuito.

Date n persone qual è la probabilità che ve ne siano 2 nate lo stesso giorno?

Numeriamo le persone da 1 a k e definiamo

$$A_k = \left\{ \begin{array}{l} \text{tra le prime } k \text{ persone non ve ne sono} \\ \text{due nate nello stesso giorno} \end{array} \right\}$$

A_2 si verifica se le prime due persone non sono nate lo stesso giorno.

A_3 si verifica se le prime tre persone ~~non~~ non sono nate lo stesso giorno.

Per la definizione di probabilità condizionata:

$$P(A_k \mid A_{k-1}) = \frac{P(A_k A_{k-1})}{P(A_{k-1})}$$

La probabilità di non avere compleanni coincidenti fra i primi k individui è condizionata dal fatto che non ci siano compleanni coincidenti nei primi (k-1) individui.

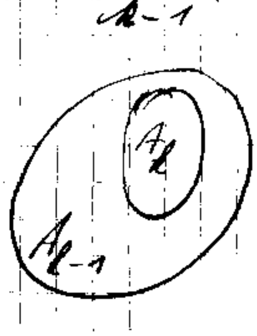
Si nota che $A_k \subset A_{k-1}$

Se non ci sono coincidenze nei primi k individui non ci sono coincidenze anche nei primi (k-1) individui.

Tutte le volte che è vero A_k, è vero anche A_{k-1}.

Si può scrivere

$$P(A_k \mid A_{k-1}) = \frac{P(A_k)}{P(A_{k-1})}$$



L'intersezione tra A_{k-1} e A_k è A_k.

Ne consegue

$$P(A_k) = P(A_k \mid A_{k-1}) P(A_{k-1})$$

È una formula ricorsiva

Osserviamo che: $P(A_k \mid A_{k-1}) = \dfrac{365-(k-1)}{365}$

Dopo aver occupato $(k-1)$ giorni del calendario, per il k-esimo giorno restano a disposizione

$$365-(k-1) \text{ giorni}.$$

Ci sono "liberi" $365-(k-1)$ giorni fra 365, per non avere coincidenze.

Osservando ancora che

$$P(A_2)=\frac{364}{365}$$

si ottiene

$$P(A_n)=P(A_n|A_{n-1})\cdot P(A_{n-1})=\frac{365-(n-1)}{365}\,P(A_{n-1})=$$

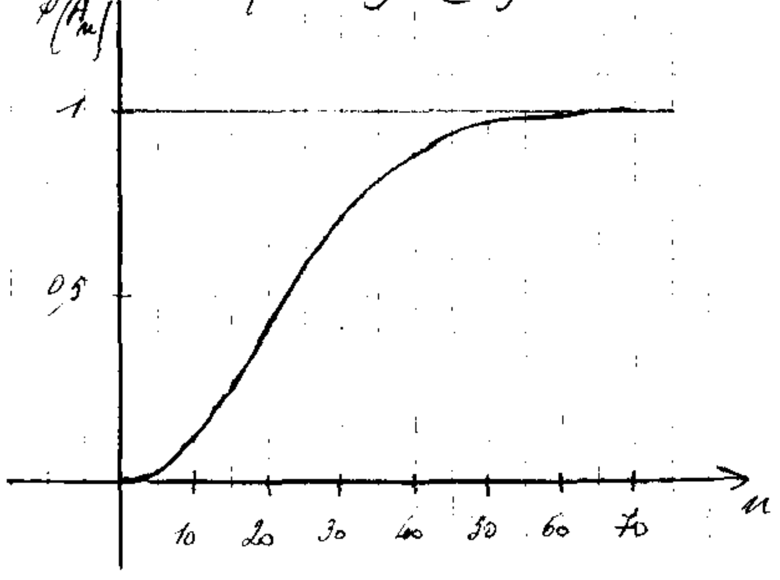
$$=\frac{365-(n-1)}{365}\,P(A_{n-1}|A_{n-2})\cdot P(A_{n-2})=$$

$$=\frac{365-(n-1)}{365}\cdot\frac{365-(n-2)}{365}\cdot P(A_{n-2})=$$

$$\cancel{=\frac{365-(n-1)}{365}\;\frac{365-(n-2)}{365}\;\frac{365-(n-3)}{365}}$$

$$=\underbrace{\frac{365-(n-1)}{365}}_{P(A_n|A_{n-1})}\cdot\frac{365-(n-2)}{365}\cdot\frac{365-(n-3)}{365}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{363}{365}}_{P(A_3)}\cdot\underbrace{\frac{364}{365}}_{P(A_2)}=$$

$$=\frac{364!}{(365-n)!\,(365)^{n-1}}$$



 Esercizio n. 5 del foglio distribuito (braccio della morte)

Conveniamo di essere il prigioniero n. 1
Definiamo gli eventi:

A_i = {i-esimo prigioniero è scelto per essere giustiziato}
con $i = 1, 2, 3$

B_i = {i-esimo prigioniero è dichiarato salvo dal secondino}
con $i = 2, 3$

È richiesto di calcolare la probabilità di essere giustiziati (A_1) condizionata da B_2 e, per simmetria, da B_3.

$$P(A_1 / B_2) = P(A_1 / B_3) = ?$$

Per ipotesi si abbia

$$P(A_i) = \frac{1}{3}$$ (tutti i prigionieri hanno la stessa probabilità di essere giustiziati)

Applichiamo il teorema di Bayes.

$$P(A_1 / B_2) = \frac{P(B_2 / A_1) \cdot P(A_1)}{P(B_2)}$$

$P(B_2 / A_1) = 0,5$ — A_1 è giustiziato. B_2 è dichiarato salvo mediante lancio di una moneta. B_2 e B_3, entrambi salvi, hanno le stesse probabilità di essere dichiarati salvi dal secondino.

$P(B_2 / A_2) = 0$ — Se il prigioniero n. 2 è condannato, non ha alcuna probabilità di essere dichiarato salvo dal secondino.

$P(B_2 / A_3) = 1$ — Se il prigioniero n. 3 è condannato automaticamente il n. 2 è dichiarato salvo

Calcoliamo il denominatore $P(B_2)$, che con il teorema di Bayes, si calcola sempre come probabilità totale.

$$P(B_2) = P(B_2/A_1)\cdot P(A_1) + P(B_2/A_2)\cdot P(A_2) + P(B_2/A_3)\cdot P(A_3) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} =$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Riprendendo il teorema di Bayes:

$$P(A_1/B_2) = \frac{P(B_2/A_1)\cdot P(A_1)}{P(B_2)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{3}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$$

<u>Osservazione</u>: dopo che il secondino ci ha dichiarato che uno degli altri due prigionieri si salva, la nostra situazione probabilistica è rimasta invariata.

È vero che il secondino ci ha ~~fornito~~ fornito un'informazione, ma il modo con cui ce la fornisce è ininfluente.

In effetti il secondino ci informa che uno degli altri due si salva, ma ciò era noto fin dall'inizio.

<u>Osservazione</u>

$P(A_2/B_2) = 0$ La probabilità che il prigioniero n. 2 venga giustiziato se il secondino lo dichiara salvo è nulla; poiché il secondino non mente!

$P(A_1/B_2) + P(A_2/B_2) + P(A_3/B_2) = 1$

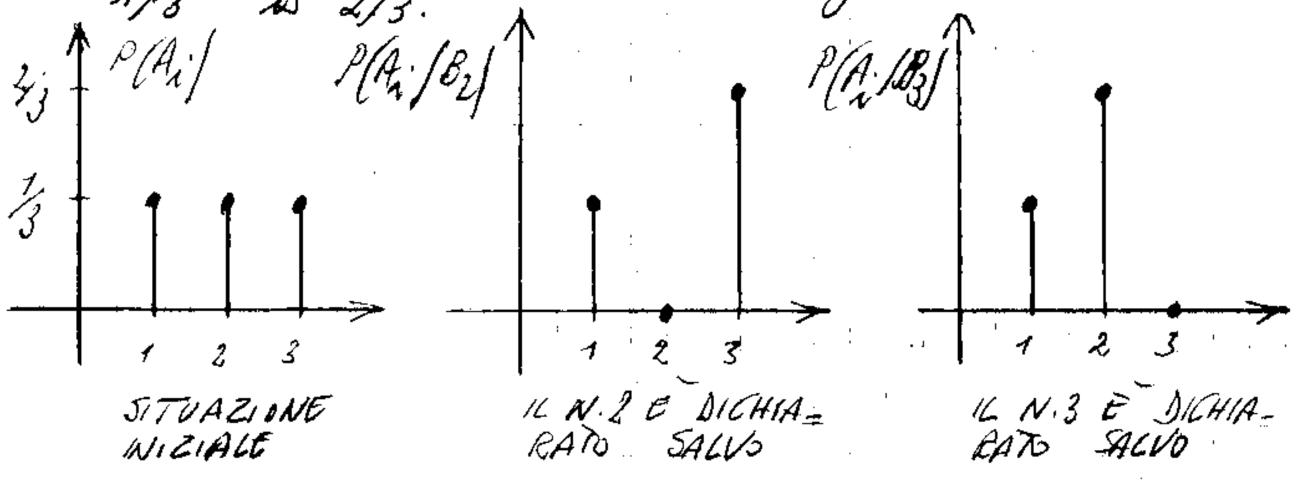
Uno dei tre è comunque giustiziato se il n. 2 è dichiarato salvo.

Ne consegue:

$$P(A_3/B_2) = 1 - P(A_1/B_2) - P(A_2/B_2) =$$
$$= 1 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

 Ciò significa che il secondino, a noi (A_1) non dà informazioni utili; ma ne dà di molto attive al terzo (A_3).

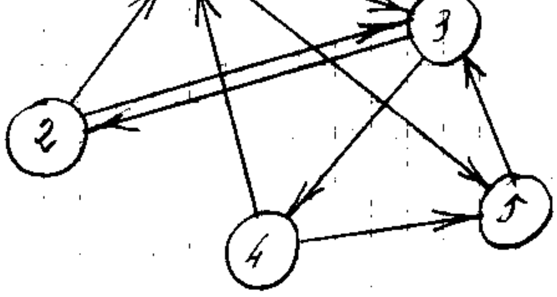
La sua probabilità di essere giustiziato passa da 1/3 a 2/3.



Esercizio (RANDOM SURFER)

Vediamo di modellizzare il comportamento della navigazione su Internet, tramite il Web.

I nodi sono 5, collegati nel modo indicato.



La navigazione è casuale: se siamo nel nodo 5 possiamo andare sul nodo 3 oppure su un nodo qualsiasi usando il teletrasporto, cioè selezionando arbitrariamente qualsiasi altro nodo della Rete.

Supponendo che gli spostamenti siano casuali, considerando il tempo t come le rappresentazioni i passi della navigazione (cambiando il sito, il contatore t aumenta di una unità).

Considerando un determinato valore di t, ci chiediamo quale sia la probabilità di trovarsi sul sito i, ponendo

$$x_i(t) = P(x(t) = i)$$

La probabilità non è la stessa per tutti i siti.

$x_i(t)$ rappresenta la probabilità che il nodo visitato al tempo t fosse il nodo i.

Usiamo il teorema della probabilità totale. 85

$$\cancel{(84)} \quad \pi_j(t+1) = P(n(t+1) = j \mid R) \cdot P(R) + P(n(t+1) = j \mid \bar{R}) \cdot P(\bar{R})$$

$\bar{R}$ rappresenta il teletrasporto

$$\bar{R} = \{\text{teletrasporto}\}$$

$$R = \{\text{si sceglie uno dei link in modo equiprobabile}\}$$

R ~~ed~~ $\bar{R}$ rappresentano le due modalità di scegliere ~~uno~~ un nodo nel Web.

Ipotizziamo che $P(R) = p$

$$P(\bar{R}) = 1-p$$

Si ottiene

$$(85) \quad \pi_j(t+1) = P(n(t+1) = j \mid R)\, p + P(n(t+1) = j \mid \bar{R})\, \frac{1-p}{N}$$

La probabilità che $n(t+1)$ sia uguale a j con il teletrasporto deve considerare tutti i nodi equiprobabili ed è pari a $\frac{1-p}{N}$

Occorre sviluppare il primo addendo che rappresenta la probabilità che al passo $t+1$ ci si trovi nel nodo j sapendo che al passo t non è stato usato il teletrasporto.

Utilizziamo il teorema della probabilità totale.

$$P(n(t+1) = j \mid R) = \sum_{i=1}^{N} P(n(t+1) = j \mid n(t) = i, R) \cdot P(n(t) = i \mid R)$$

Stiamo calcolando la probabilità di trovarci ad esempio nel nodo 3 all'istante $(t+1)$. Al nodo 3 ci si può arrivare da 1 da 2 e da 5. Occorre considerare tutte le possibilità, pesandole opportunamente.

Si esegue la sommatoria rispetto a tutti i nodi delle probabilità che al passo $n(t+1)$ ci si trovi al nodo j, sapendo che al passo precedente ci si trovava nel nodo i.

86 Siamo nell'universo condizionato rispetto ad R.
Il termine va moltiplicato per la probabilità che $n(t)$ sia uguale ad i, condizionato ad R, che è uguale a

$$\pi_i(t) = P(n(t)=i) \qquad \text{(pag. 84)}$$

Se ci troviamo nel nodo i la probabilità di andare al nodo j dipende dal numero di link che ha il nodo i.
I link vanno scelti in modo equiprobabile. Si ottiene:

$$(86) \qquad P(n(t+1)=j \,|\, R) = \sum_{i=1}^{N} \frac{L_{ij}}{\sum_{k=1}^{N} L_{ik}}$$

Ricordiamo che la matrice L è la matrice di ~~incidenza del grafo~~ adiacenza del grafo.

Nel caso però in esame:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se c'è un 1 nella posizione ij, si può andare da i a j.
Immaginando di essere nel nodo 3 (terza riga), la matrice indica che si può andare a 2 e a 4.

Ognuno dei due archi ha il 50% di possibilità.
Occorre eseguire la somma per righe e posizionarla al denominatore. Essa indica il numero di archi che escono dal nodo.
Il termine $\dfrac{L_{ij}}{\sum_{k=1}^{N} L_{ik}}$ indica che siamo posizionati nella riga i-esima, stiamo controllando se esiste un percorso che va da i a j mediante il termine L_{ij} (0 oppure 1) e stiamo dividendo per il numero di archi che escono dal nodo i.

Se non si usa il teletrasporto e siamo in un nodo si sceglie a caso e in maniera equiprobabile uno dei link uscenti.

nel caso del nodo 3 il denominatore vale 2, poi = 87 de- da esso escono due archi.

Al numeratore (L_{ij}) si può avere 0 oppure 1.

Definiamo la matrice A_{ij}

(87) $$A_{ij} = \frac{L_{ij}}{\sum_{k=1}^{N} L_{ij}}$$

definiamo anche il vettore degli uni.

$$\mathbb{1} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (n \text{ righe} \times 1 \text{ colonna})$$

Sostituendo la (87) nella (86) di pag. 86 si ottiene

$$P(x(t+1) = j \mid k) = A_{ij}$$

Sostituendo quest'ultima nella (85) di pag. 85 si ha.

(87 a) $$x(t+1) = p \cdot A x(t) + \frac{1-p}{N} \mathbb{1}$$

Ricordiamo che $x(t)$ è il vettore delle probabilità (pag. 84),

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Il vettore $x(t)$ è un vettore di numeri che forniscono le probabilità di stare nei vari nodi. La somma di tutti gli elementi deve fornire 1.

La (87 a) permette di calcolare $x(t+1)$ conoscendo $x(t)$. Partendo da $x(t)$ al passo 0, che avrà un solo elemento uguale ad 1, quello relativo al nodo di partenza, mentre gli altri elementi sono tutti nulli, si applica la (87 a) in maniera iterativa e si calcola la probabilità di trovarsi nei diversi nodi, nei vari passi della navigazione.

C'è un altro modo di esprimere la (87 a)

$$x(t+1) = p A x(t) + \frac{1-p}{N} V x(t)$$

V è una matrice composta da soli 1.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Si osservi che $V \cdot x(t) = \mathbb{1}$ ottenendo:

$$x(t+1) = \left(pA + \frac{1-p}{N} V \right) x(t)$$

La quantità entro parentesi è una matrice $N \times N$.
I pagerank scores sono uguali a

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}$$

Infatti, continuando a navigare nel Web, si crea una situazione stazionaria, nel senso che $x(t)$ non cambia più.

Google si fonda sul modello illustrato e crea un rank dei vari siti, in base alla probabilità $x(t)$.
In $x(t)$ c'è un numero per ogni nodo del Web. Alcuni siti hanno probabilità maggiori di altri.
Eseguendo i calcoli nel caso dello schema di pag. 84 si ottiene

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0{,}1716 & 0{,}1666 & 0{,}3214 & 0{,}1666 & 0{,}1737 \end{bmatrix}^T$$

Si nota che il nodo 3 è il più importante.

VARIABILI CASUALI CONGIUNTE

•) Variabile casuale vettoriale

È un esperimento che fornisce come esito un vettore di numeri reali

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Esempio:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Peso} \\ \text{Altezza} \end{bmatrix}$$

Nel caso che n sia uguale a 2, si usa

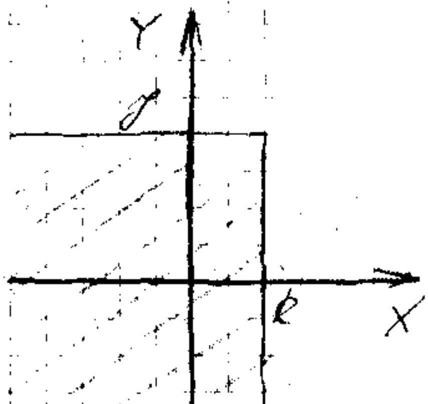
$$X = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

•) Funzione di distribuzione congiunta

$$F_{XY}(x,y) := P(X \le x,\ Y \le y)$$

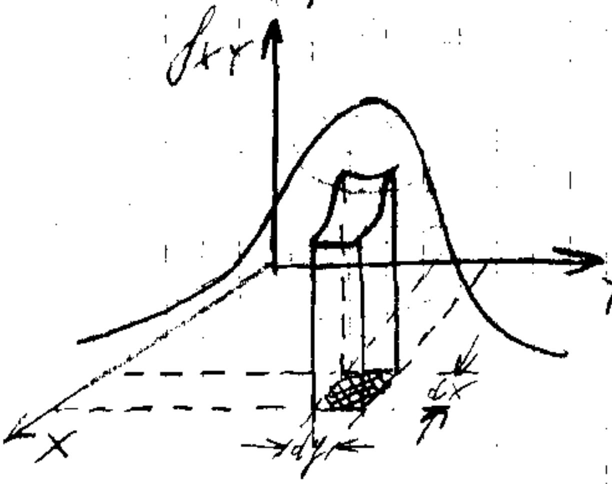
È una funzione di due variabili e i due eventi devono verificarsi simultaneamente.

Essa rappresenta la probabilità di cadere nella zona evidenziata.



•) Densità di probabilità congiunta

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\, \partial y}$$



-) Proprietà

- •) $f_{XY}(x,y) \ge 0 \quad \forall x, y$
- •) $F_{XY}(\bar{x},\bar{y}) = \int_{-\infty}^{\bar{x}} \int_{-\infty}^{\bar{y}} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$

•) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$

•) $f_{XY}(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{P(x \le X \le x+\Delta x,\ y \le Y \le y+\Delta y)}{\Delta x\,\Delta y}$

•) $P((x,y) \in D) = \int_D f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

Osservazioni

La $f_{XY}(x,y)$ è sempre non negativa come accadeva per la $f_X(x) \geq 0$ (pag. 44)

Anche in questo caso la F_{XY} si ottiene integrando la f_{XY}, con la differenza che, ora, l'integrale è doppio.

L'integrale doppio della terza proprietà rappresenta il volume compreso tra la superficie che rappresenta il grafico della f_{XY} ed il piano XY. Il volume deve essere unitario.

La ~~quinta~~ quarta proprietà opera in un rapporto incrementale e consente di calcolare f_{XY}

La quinta proprietà permette di calcolare la probabilità di cadere in una determinata regione. L'integrale doppio consente ancora di calcolare un volume, ma limitatamente alla regione D.

•) Distribuzione e densità marginali

Data una coppia di v.c. X e Y le f.d.d. $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ e le d.d.p. $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ delle singole v.c. X e Y sono dette f.d.d e d.d.p. marginali.

Si noti che la f.d.d. $F_{XY}(x,y)$ e la d.d.p. $f_{XY}(x,y)$ sono dette congiunte.

In altre parole, date due v.c. X e Y si possono considerare tre f.d.d. e tre d.d.p.

•) Passaggio dalle funzioni congiunte alle marginali

-) $F_X(x) = F_{XY}(x,\infty)$

-) $F_Y(y) = F_{XY}(\infty,y)$

E' immediato osservare che

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x,\ Y \le \infty)$$

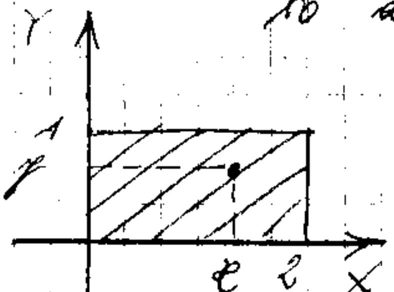
la condizione $Y \le \infty$ è irrilevante

Dalla funzione congiunta si possono ricavare le funzioni marginali. In generale, non è possibile il passaggio inverso.

$$-)\ f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\, dy$$

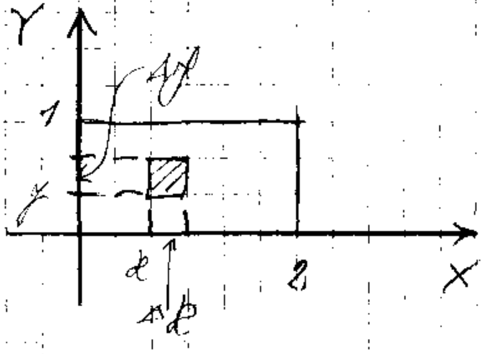
$$-)\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\, dx$$

Esempio. Calcolare le d.d.f. congiunte e marginali delle coordinate (x, y) di un punto scelto in modo equiprobabile nel rettangolo indicato sotto a sinistra.



Per calcolare la d.d.f. congiunta consideriamo un rettangolo infinitesimo di lati ~~dx e dy~~ Δx e Δy

Dobbiamo calcolare la probabilità che X sia compresa tra ~~x e $x+\Delta x$~~ ~~x e Δx~~ e che Y sia compresa tra y e $y+\Delta y$. Occorre, cioè, determinare



$$P(x \le X \le x+\Delta x,\ y \le Y \le y+\Delta y)$$

In termini di equiprobabilità si tratta di determinare la probabilità di cadere nel rettangolino indicato a destra.

Nello spazio degli esiti equiprobabili la probabilità è data dal rapporto tra l'area del rettangolino e quella del rettangolo intero

$$P(\dots) = \frac{\text{misura area tratteggiata}}{\text{misura } (S)} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{1 \cdot 2} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2}$$

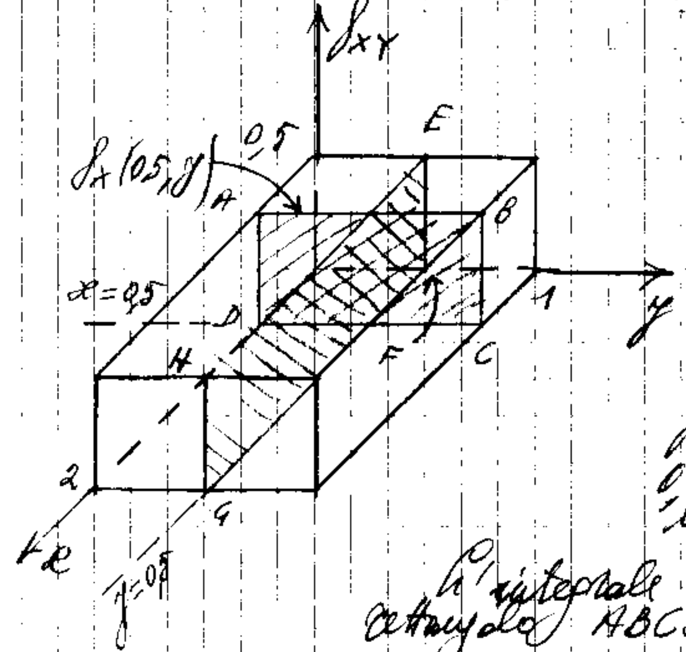
Sfruttando la proprietà di pag. 90:

$$f_{XY}(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \le X \le x+\Delta x,\ y \le Y \le y+\Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2}}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{1}{2}$$

92 Regola generale: dato un punto scelto in maniera equiprobabile in una determinata regione, la densità congiunta è l'inverso dell'area della regione.

Avendo considerato una situazione di equiprobabilità la d.d.p. deve essere una costante (in termini geometrici è un piano parallelo al piano $x\,y$).



Calcoliamo $f_X(0{,}5)$

$$f_X(0{,}5) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(0{,}5, y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 0{,}5 \cdot dy = 0{,}5 \times 1 =$$

$$= 0{,}5$$

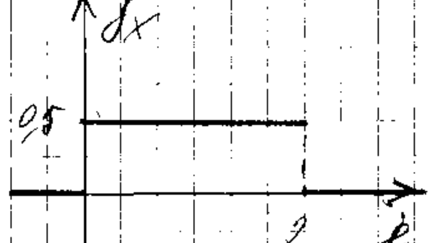
Avendo bloccato il valore di x a $0{,}5$ stiamo valutando la f_{XY} lungo la retta $x = 0{,}5$

L'integrale calcolato determina l'area del rettangolo ABCD ($b \times h = CD \times AD = 1 \times 0{,}5$).

Il calcolo della d.d.p. marginale può sempre essere eseguito nel modo indicato: si opera un taglio con un piano perpendicolare al piano $x\,y$ (ad x oppure y fissato) e si valuta l'area della sezione ottenuta.

Si ottiene:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}5 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



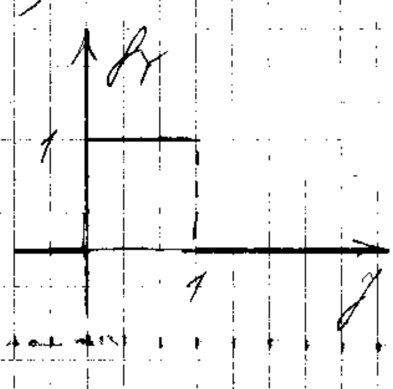
Calcoliamo la $f_Y(0{,}5)$

$$f_Y(0{,}5) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, 0{,}5)\,dx =$$

$$= \int_0^2 0{,}5 \cdot dx = 0{,}5 \times 2 = 1$$

Stiamo calcolando l'area del rettangolo EFGH ($EH \times EF = 2 \times 0{,}5 = 1$). Si ottiene:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



•) <u>Densità condizionate</u>

Definizione: $f_{Y|X}(y|X=x) := \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$

Se X è l'altezza ed Y il peso, la d.d.p. del peso condizionata dall'altezza è il rapporto della d.d.p. congiunta con la d.d.p. marginale dell'altezza.

Si può ad esempio determinare la d.d.p. del peso, fissando l'altezza ad 1,90 m

•) <u>Teorema della probabilità totale</u>

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|X=x) f_X(x)\, dx$$

Si sta condizionando su tutti i possibili valori di X che sono infiniti e riducendo una operazione di integrazione.

•) <u>Teorema di Bayes</u>

$$f_{Y|X}(y|X=x) = \frac{f_{X|Y}(x|Y=y) \cdot f_Y(y)}{f_X(x)}$$

•) <u>Variabili casuali indipendenti</u>

Due variabili casuali X e Y si dicono indipendenti se la loro densità congiunta si può scrivere come il prodotto delle densità marginali.

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

<u>Proprietà</u>: le seguenti relazioni sono tra loro equivalenti

-) $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

-) $F_{XY}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$

-) $f_{X|Y}(x|Y=y) = f_X(x)$

-) $f_{Y|X}(y|X=x) = f_Y(y)$

Se la densità congiunta si può esprimere come prodotto delle marginali, ciò vale anche per la f.d.d.

Se vale una delle quattro proprietà, valgono anche le altre tre.

La terza proprietà afferma che la densità di X condizionata ai valori di Y è uguale alla marginale di X, che esprime il concetto di indipendenza.

L'indipendenza tra due v.c. indica che la conoscenza di una delle due variabili non dà informazioni sui valori assunti dall'altra.

Ciò non succede per le v.c. peso ed altezza che non sono indipendenti tra loro.

__Teorema__

Se X e Y sono indipendenti, allora le variabili casuali

$$Z = g(X) \quad e \quad W = h(Y)$$

sono anch'esse indipendenti.

•) __Funzioni di v.c. congiunte__

Date due v.c. X e Y ed una funzione $g(x, y)$,

$$Z = g(X, Y)$$

è una nuova v.c.

~~Interessa~~ Interessa calcolare le proprietà statistiche di Z a partire da quelle di X e Y.

-) __Calcolo della ~~f.d.~~ d.d.p. $f_Z(z)$__

Occorre definire un insieme di z, come tutte le coppie (x, y), tali che $g(x, y) \leq z$.

$$D_z = \{(x, y) : g(x, y) \leq z\}$$

Si ottiene

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(g(X, Y) \leq z) =$$

$$= P\left((X,Y) \in D_z\right) =$$

$$= \int_{D_z} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$