LEZIONE (7) 20/04/09

Tema d'esame (1ª prova in itinere - MN) (29/04/08)
Il testo è reperibile in Rete.

(N. 2)

Ricordando la teoria (pag. 58):
data $Y = g(X)$, se l'equazione $y = g(x)$ ammette una sola radice x_1

$$x_1 = x_1(y),$$

supponendo la y nota e la x incognita, si ottiene:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}$$

Se non esistono radici, la $f_Y(y)$ vale zero.

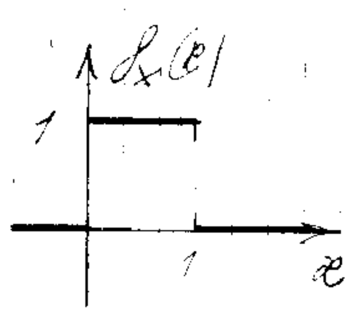
– 1) $Y = \ln\left(\frac{X}{2}\right)$

x è la radice dell'equazione $y = g(x)$, in cui si suppone che y sia nota.

$$y = \ln\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = e^y \Longrightarrow x_1 = 2e^y$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{1}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$$

Per ipotesi, la $f_X(x)$ è uniforme in $[0, 1]$ e vale 1 in questo intervallo, mentre vale 0 altrove.



Ne consegue che $f_X(x_1) = 1$ se
$0 \le x \le 1$

se $x = 0 \Longrightarrow 0 = 2e^y \quad e^y = 0 \quad y = -\infty$

se $x = 1 \Longrightarrow 1 = 2e^y \quad e^y = \frac{1}{2} \quad y = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

cioè: $-\infty \le y \le -\ln 2$

o, più semplicemente, $y \le -\ln 2$

118 Concludendo:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = 2e^y \quad y \le -\ln 2$$

e

$$f_Y(y) = 0 \quad \text{se } y > -\ln 2$$

– 2) $Y = \ln(2X) \Rightarrow y = \ln(2x) \quad e^y = 2x \quad x_1 = \frac{e^y}{2}$

$y = g(x) \Rightarrow y = \ln(2x)$

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{1}{2x} 2 = \frac{1}{x}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left|\frac{1}{x}\right|} = \dfrac{1}{\left|\frac{2}{e^y}\right|} = \dfrac{e^y}{2} & \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ \Downarrow \\ -\infty \le y \le \ln 2 \end{matrix} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

– 3) $Y = \frac{1}{X} \qquad y = \frac{1}{x} \qquad x_1 = \frac{1}{y} \qquad 0 \le x \le 1$

$1 \le y \le \infty$

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f_Y(y) \begin{cases} \dfrac{1}{\left|-\frac{1}{x^2}\right|} = \dfrac{1}{y^2} & y \ge 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

– 4) $Y = \frac{1}{X^2} \qquad y = \frac{1}{x^2} \qquad x^2 = \frac{1}{y} \qquad x_1 = \frac{1}{\sqrt{y}} \qquad 0 \le x \le 1$

$1 \le y \le \infty$

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\cancel{\frac{1}{\left|\frac{2}{x^3}\right|} = \frac{1}{\left|\frac{2}{y\sqrt{y}}\right|}} =$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left|-\dfrac{2}{x_1^3}\right|} = \dfrac{1}{\left|-\dfrac{2}{\frac{1}{y^{3/2}}}\right|} = \dfrac{1}{2y^{3/2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{y^3}} & y \geq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

-5) $Y = \dfrac{1}{\sqrt{X}}$ $\quad y = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad x_1 = \dfrac{1}{y^2}$ $\quad 0 \leq x \leq 1$, $\; 1 \leq y \leq \infty$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$f_Y(y) \begin{cases} \dfrac{1}{\left|-\dfrac{1}{2\sqrt{x_1^3}}\right|} = \dfrac{1}{\left|-\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1}{y^6}}}\right|} = \dfrac{1}{\left|-\dfrac{y^3}{2}\right|} = \dfrac{2}{y^3} & y \geq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

-6) $Y = \sqrt{X}$ $\quad y = g(x) = \sqrt{x}$ $\quad x_1 = y^2$ $\quad 0 \leq x \leq 1$, $\; 0 \leq y \leq 1$

$$g'(x_1) = \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left|\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}\right|} = 2y & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Stesso tema d'esame

(N.4) I primi due scatter plot non sono uguali. Evidentemente la scala. Devono essere il risultato di due definizioni praticamente uguali a meno di un fattore di scala

La terza e il quarto sono molto simili ma con il coefficiente di correlazione che cambia segno.

Il sesto scatter plot sta su una retta con coefficiente di correlazione uguale a -1. Inoltre tra X e Y esiste una

120 relazione deterministica: nota una, si ricava l'altra.
Inoltre si ferma due scatter plot mostrano una certa dispersione e con forma ellissoidale. Ciò indica che le variabili sono scorrelate. Gli scatter plot di V e W sarebbero perfettamente circolari, essendo esse variabili gaussiane standard e indipendenti.
Lo scatter plot di destra è più disperso lungo la retta e ciò mostra che la varianza di Y è maggiore rispetto allo scatter plot di sinistra.
Procediamo ora al calcolo esatto di $\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_{XY}$

Dalla teoria si sa (pag. 113) che se X e Y sono tali che

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

allora

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = Var\left[\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right] = A\, Var\left[\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}\right] A^T =$$

$$= A \begin{bmatrix} \sigma_V^2 & \sigma_{VW}^2 \\ \sigma_{VW}^2 & \sigma_W^2 \end{bmatrix} A^T$$

Essendo V e W indipendenti, allora sono anche incorrelate.
Perciò $\sigma_{VW} = 0$
Essendo V e W anche gaussiane standard, $\sigma_V^2 = \sigma_W^2 = 1$

- 1) $X = V + 2W \quad Y = -2V - W$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = A\, I\, A^T = A A^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

da cui consegue che $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 5$, $\sigma_{XY} = -4$

$$\varrho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-4}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = -\frac{4}{5} = -0{,}8$$

– 2) $X = V \quad Y = 2W$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY}^2 \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = A \cdot I \cdot A^T = A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_X^2 = 1 \;,\; \sigma_Y^2 = 4 \;,\; \sigma_{XY} = 0 \quad \varrho_{XY} = \frac{0}{1 \cdot \sqrt{4}} = 0$$

Si sarebbe potuto osservare che essendo V e W indipendenti anche X e Y lo sono, date le loro definizioni.

– 3) $X = 2V \qquad Y = 2W$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 4 \quad \sigma_{XY} = 0 \quad \varrho_{XY} = 0$$

– 4) $X = V + W \qquad Y = 4W$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_X^2 = 2 \quad \sigma_Y^2 = 16 \quad \sigma_{XY} = 4 \quad r_{XY} = \frac{\cancel{4}}{\sqrt{2}\cancel{\sqrt{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$\cong 0{,}707$$

\- 5) $X = V - W \qquad Y = 4W$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_X^2 = 2 \quad \sigma_Y^2 = 16 \quad \sigma_{XY} = -4 \quad r_{XY} = \frac{-\cancel{4}}{\sqrt{2}\cancel{\sqrt{16}}} =$$

$$\cong -0{,}707$$

\- 6) $X = V - W \qquad Y = -V + W$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 2 \quad \sigma_{XY} = -2 \quad r_{XY} = \frac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -1$$

Raccogliendo i dati in una tabella

La riga 6 relativa lo scatter plot n. 6 perché il coefficiente di correlazione è pari ad 1.

Le righe 2 e 3 riguardano scatter plot con correlazione nulla.

N.	σ_X^2	σ_Y^2	r_{XY}
1	5	5	-0,8
2	1	4	0
3	4	4	0
4	2	16	0,7
5	2	16	-0,7
6	2	2	-1

Gli scatter plot sono i primi due. Bene; il secondo scatter plot ha una maggiore dispersione lungo x, esso corrisponde alla riga 3.
Il primo scatter plot corrisponde, perciò, alla riga 2.

Delle righe rimanenti solo la numero 4 ha coefficiente di correlazione positivo ed ha come scatter plot corrispondente il terzo.
Restano la riga 1 e la 5 con coefficienti di correlazione simili. La riga 5 ha come corrispondente uno scatter plot con maggior dispersione lungo y (scatter plot 4).
La riga 1, perciò, corrisponde allo scatter plot 5.

Stesso tema d'esame

(N. 3) Questo tipo di esercizi ha un peso rilevante nella valutazione della prova. Si acquisisce la sufficienza raggiungendo il punteggio +3.

- (a) Due eventi sono disgiunti se la loro intersezione è vuota. In questo caso lo sono.

  Due eventi sono indipendenti se

  $$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$
  $$0 \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

  Gli eventi non sono indipendenti (se si verifica A, non può verificarsi B)

  Risposta: F (= Falso)

- (b) Si tratta di calcolare la probabilità che la moneta sia onesta, sapendo che è uscito Testa.

  Applichiamo il teorema di Bayes.

  $P(On)$ = Probabilità che la moneta sia onesta

  $$P(On \mid T) = \frac{P(T \mid On) \cdot P(On)}{P(T)} =$$
  $$= \frac{P(T \mid On) \cdot P(On)}{P(T \mid On) \cdot P(On) + P(T \mid \overline{On}) \cdot P(\overline{On})} =$$

124

$$= \frac{0,5 \times 0,5}{0,5 \times 0,5 + 1 \times 0,5} = \frac{0,25}{0,75} = \frac{1}{3}$$

Risposta : F

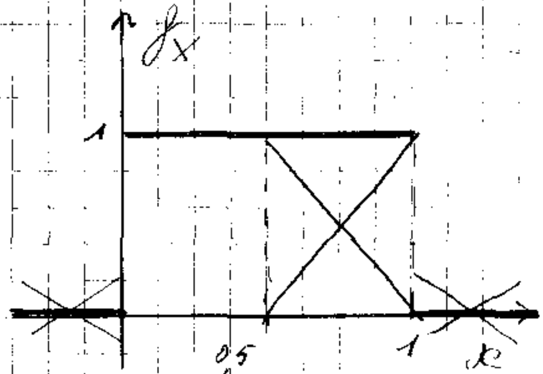
- c) La probabilità cercata è (esempio di pag. 34)

$$P = q^3 p = (0,5)^3 \cdot 0,5 = \frac{1}{16}$$

Risposta : F

- d) $E[X \mid X < 0,5]$ indica il baricentro associato alla densità condizionata dalla relazione

$$X < 0,5$$



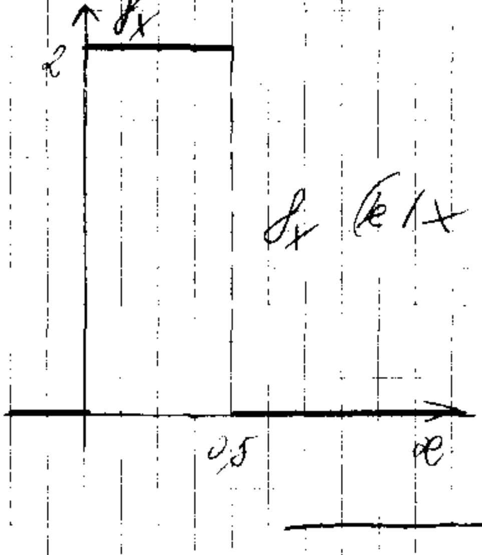
Per definizione si ha che:

$$F_{X|A}(x|A) = \frac{P(X < x, A)}{P(A)}$$

$$f_{X|A}(x|A) = \frac{d}{dx} F_{X|A}(x|A)$$

Sapendo che $x < 0,5$ in effetti si stanno ritenendo le parti barrate dell'asse reale.

In pratica, considerando la condizione la d.d.p. che era uniforme tra 0 e 1, diventa uniforme tra 0 e 0,5.



Il valore atteso coincide con il baricentro che vale 0,25

$f_X(x \mid X < 0,5)$ Risposta : V

- e) Partendo dalla definizione si ha:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX + b \le y) = P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

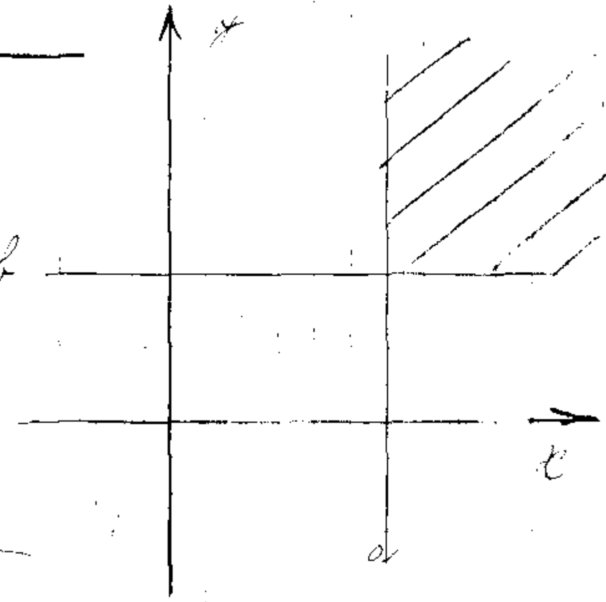
Occorre porre attenzione al segno di a. Nel caso fosse

$$a < 0$$

occorre invertire il segno di disuguaglianza.

Risposta: V

- f) È richiesta la probabilità di cadere nella zona tratteggiata



~~$P(X >$~~

$A = \{X \le a\}$

$B = \{Y \le b\}$

L'evento A è associato alla zona del semipiano a sinistra della retta

$$x = a$$

L'evento B è associato alla zona sotto alla retta

$$y = b$$

C è l'evento che interessa

$$C = \{X > a,\ Y > b\}$$

Notiamo che $\bar{C} = A + B$

$\bar{C}$ rappresenta i punti nel piano che stanno fuori dalla zona tratteggiata.

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \{P(A) + P(B) - P(AB)\} =$$
$$= 1 - \{F_X(a) + F_Y(b) - F_{XY}(a,b)\} =$$
$$= 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F_{XY}(a,b)$$

Risposta: V

---

126 - g) Ricordiamo (pag. 102) che la Erlang-2 è la somma di due v.c. esponenziali ed è definita solo per valori positivi di k.

La variabile $X-Y$ è il risultato della somma di una quantità positiva e di una negativa.

Quest'ultima è definita per valori negativi della k.

Il risultato assumerebbe valori sia positivi che negativi, nel caso che Y assume valori maggiori di quelli assunti da X.

Risposta: F

- h) $V = X - a \Rightarrow Var[X] = Var[X-a]$ e
$Var[V] = Var[X]$

$W = Y - b \Rightarrow Var[Y-b] = Var[Y] = Var[W]$

$$Cov[V, W] = E[(V-E[V])(W-E[W])] =$$
$$= E[(X-a-E[X-a])(Y-b-E[Y-b])] =$$
$$= E[(\cancel{X}-\cancel{a}-E[X]+\cancel{a})(Y-\cancel{b}-E[Y]+\cancel{b})] =$$
$$= E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = Cov[X\ Y]$$

Anche il coefficiente di correlazione, di conseguenza, non cambia.

Risposta: V

Variante dell'esercizio proposto:

$V = \alpha X + a \quad W = \beta Y + b$

$$Cov[V, W] = E[(V-E[V])(W-E[W])] =$$
$$= E[(\alpha X + a - E[\alpha X + a])(\beta Y + b - E[\beta Y + b])] =$$
$$= E[(\alpha X + \cancel{a} - E[\alpha X] - \cancel{a})(\beta Y + \cancel{b} - E[\beta Y] - \cancel{b})] =$$
$$= E[(\alpha X - \alpha E[X])(\beta Y - \beta E[Y])] =$$
$$= \alpha\beta\, E[(X-E[X])(Y-E[Y])] =$$
$$= \alpha\beta\, Cov[X, Y]$$ la covarianza non si conserva

Ricordando che $Var[V] = \alpha^2 Var[X]$ e
$Var[W] = \beta^2 Var[Y]$ (Pag. 68)

si ottiene

$$r_{VW} = \frac{Cov[V,W]}{\sqrt{Var[V]\,Var[W]}} = \frac{\alpha\beta\, Cov[X,Y]}{\sqrt{\alpha^2 Var[X]\,\beta^2 Var[Y]}} =$$

$$= \text{sign}(\alpha\beta)\, r_{XY}$$

Occorre tener conto del segno di $(\alpha\beta)$.

- i) In questo tipo di domande, se la risposta è vera occorre dimostrarla; se la risposta è falsa è sufficiente trovare un controesempio.

Tentiamo di trovare un controesempio

Si considerino due v.c. X_1 e X_2 con

$$Var[X_1] = Var[X_2] = \sigma^2$$

Indichiamo la $Cov[X_1, X_2]$ con σ_{12}

Ricordando quanto detto a pag. 110

$$Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + 2\, Cov[X_1, X_2] + Var[X_2] =$$
$$= \sigma^2 + \sigma^2 + 2\sigma_{12} = 2\sigma^2 + 2\sigma_{12}$$

Se $\sigma_{12} < 0 \Longrightarrow Var[X_1 + X_2] < 2\sigma^2$

Risposta: F

Prova del 06/05/08 (Pavia)

(N. 3) Scatter plot monodimensionale

a) $Y = 2U$ (5° s.c.) Y è uniforme su $[0, 2]$. La media raddoppia rispetto ad U.

$$E[Y] = E[2U] = 2E[U] = 2 \times 0.5 = 1$$

b) $Y = U - V$ (6° s.c.) Y è la differenza tra due v.c. uniformi, appare la somma tra una v.c. uniforme e la stessa ribaltata attorno all'asse y.

La v.c. Y ha una d.d.p. a forma di triangolo (pag. 100) distribuito tra −1 e 1 con il vertice del triangolo, che rappresenta il maggior addensamento, al centro.

d) $Y = U + V$ (1° v.c.) La d.d.p. è un triangolo tra 0 e 2 con addensamento attorno al valore 1.

e) $Y = 2U - 1$ (2° v.c.) La v.c. 2U sarebbe uniforme tra 0 e 2. Togliendo 1 si ottiene un'uniforme tra −1 e 1.

c) $Y = 0{,}75\,X$ (4° v.c.) Y è una v.c. gaussiana centrata nell'origine e con deviazione standard pari a 0,75.

Le v.c. gaussiane si distribuiscono tra $-\infty$ e $+\infty$

f) $Y = 1 + 0{,}75\,X$ (3° v.c.) Come la c) ma con valore atteso maggiorato di 1.

Stessa prova

(N.4) La combinazione lineare di due v.c. gaussiane è una v.c. gaussiana.

Per risolvere l'esercizio occorre calcolare media e varianza della v.c. Z.

La media corrisponde ~~alla varianza~~ al picco della campana e la varianza a parità di picco suggerisce la forma della campana.

Dalla teoria si ha: (pagg. 104 e 110)

$Z = \alpha V + \beta W$

$E[Z] = \alpha E[V] + \beta E[W]$

$Var[Z] = \alpha^2 Var[V] + 2\alpha\beta\, Cov[V, W] + \beta^2 Var[W]$

Dimostrazione:

~~$Z = [\alpha \;\beta]$~~ ~~$\sigma_V^2 \; \sigma_W^2$~~

$$Z = [\alpha \;\beta]^T \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}$$

$$\sigma_Z^2 = A\begin{bmatrix}\sigma_V^2 & \sigma_{VW}\\ \sigma_{VW} & \sigma_W^2\end{bmatrix}A^T = [\alpha\ \beta]\begin{bmatrix}\sigma_V^2 & \sigma_{VW}\\ \sigma_{VW} & \sigma_W^2\end{bmatrix}A^T$$

– 1) $Z = V - W$

$\alpha = 1$, $\beta = -1$

$E[Z] = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 0$

$Var[Z] = 1^2\cdot 2 + 2(1\cdot(-1))\cdot 1 + (-1)^2\cdot 2 =$

$= 2 - 2 + 2 = 2$

– 2) $Z = V + W$ $\alpha = 1$, $\beta = 1$

$E[Z] = E[V] + E[W] = 1 + 1 = 2$

$Var[Z] = 1^2\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1 + 1^2\cdot 2 = 2 + 2 + 2 = 6$

– 3) $Z = 2V - 2W$ $\alpha = 2$, $\beta = -2$

$E[Z] = 2\cdot 1 - 2\cdot 1 = 2 - 2 = 0$

$Var[Z] = 2^2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot(-2)\cdot 1 + (-2)^2\cdot 2 =$

$= 8 - 8 + 8 = 8$

– 4) $Z = 0{,}5V + 0{,}5W$ $\alpha = \beta = 0{,}5$

$E[Z] = 0{,}5\times 1 + 0{,}5\times 1 = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$

$Var[Z] = (0{,}5)^2\times 2 + 0{,}5\times 0{,}5\times 2 + (0{,}5)^2\times 2 =$

$= 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 1{,}5$

– 5) $Z = 2V - W$ $\alpha = 2$, $\beta = -1$

$E[Z] = 2\cdot 1 - 1\cdot 1 = 2 - 1 = 1$

$Var[Z] = 2^2\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot 2 + (-1)^2\cdot 2 =$

$= 8 - 4 + 2 = 6$

– 6) $Z = 3V - W$ $\alpha = 3$, $\beta = -1$

$E[Z] = 3\cdot 1 - 1\cdot 1 = 3 - 1 = 2$

$Var[Z] = 3^2\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot(-1)\cdot 1 + (-1)^2\cdot 2 = 18 - 6 + 2 = 14$

130 Raccogliamo i dati su una tabella

Le variabili 1 e 3 hanno valor medio 0, ma la 3 ha una varianza maggiore.

Le variabili 4 e 5 hanno valor medio uguale ad 1, ma la 5 ha varianza maggiore.

Le variabili 2 e 6 hanno valor medio 2, ma la 6 ha varianza maggiore.

Numero Variab. Z	$E[Z]$	σ_Z^2	Numero Scatter Plot
1	0	2	6
2	2	6	4
3	0	8	5
4	1	15	1
5	1	6	3
6	2	14	2

Prova del 28/04/03

N. 2

- 1) È richiesta la d.d.p. di X dato Y, quando $Y = 1$

Occorre considerare la intersezione del rombo con la retta $y = 1$.

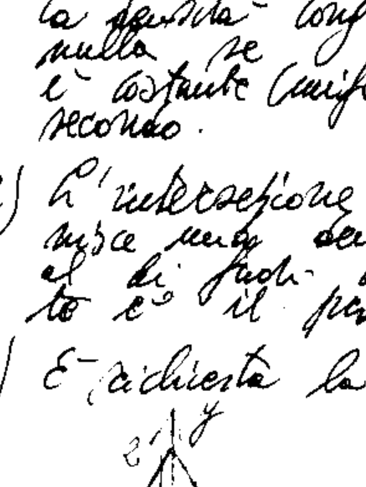
$$f_{X|Y}(x|Y=1) = \frac{f_{XY}(x,1)}{f_Y(1)} \quad \text{(pag. 93)}$$

La densità condizionata è per definizione il rapporto tra la densità congiunta e la densità condizionante. Queste due densità vanno valutate per $Y = 1$.

La densità congiunta, bloccato il valore di $Y = 1$, è nulla se $X < 0.5$ oppure $X > 0.5$. All'interno è costante (uniforme). Il grafico corrispondente è il secondo.

- 2) L'intersezione del rombo con la retta $X = 0.5$ fornisce una densità uniforme tra -1 e 1 e nulla al di fuori dell'intervallo. Il grafico corrispondente è il primo.

- 3) È richiesta la marginale in x ~~e la mar~~.



Occorre spostarsi lungo x da $-\infty$ a $+\infty$ e, per ogni valore di x occorre intersecare il rombo in direzione parallela all'asse y ed eseguire l'integrale.

L'intersezione fornisce un valore nul-

lo per valori di $X \le -1$ e $X \ge 1$. Il valore massimo dell'intersezione si ha per $X = 0$.
La densità di probabilità relativa ai punti caduti in maniera equiprobabile nel rombo è data da

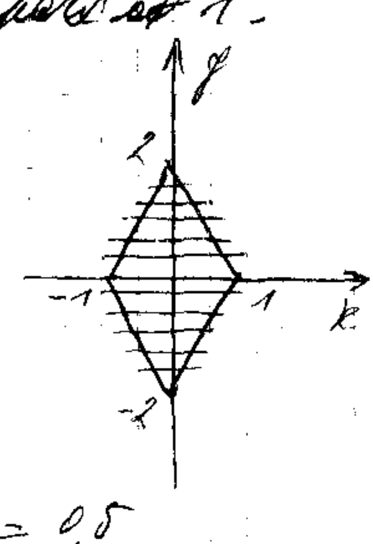
$$\text{Volume} = \text{Area} \times \text{altezza} = 1$$

$$\text{altezza} = \frac{1}{\text{Area}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \times 2 \times 4} = \frac{1}{4}$$

L'area del rettangolo, intersezione col rombo per $X = 0$ vale

$$\text{Area} = \text{base} \times \text{altezza} = 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

L'andamento delle fette è di tipo triangolare da -1 ad 1 ed il valore massimo è pari ad 1.
Il grafico corrispondente è il quarto.



- 4) È richiesta la marginale in Y. Il ragionamento è analogo.
La Y varia da $-\infty$ a ∞ e non si ha intersezione per $Y < -2$ e per $Y > 2$.
Il valore massimo dell'intersezione si ha per $Y = 0$ e vale

$$\text{Area} = \text{base} \times \text{altezza} = 2 \times \frac{1}{4} = 0{,}5$$

Il grafico corrispondente è il terzo.

Prova del 04/05/07

N. 2

•) Sono tutte prove di Bernoulli con $p = 0{,}5$.
La probabilità di ottenere k successi su n prove è

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} (0{,}5)^k (0{,}5)^{n-k} = \binom{n}{k} 0{,}5^n$$

Dando due risposte si ha

$$p_n(2) = \binom{2}{2} 0{,}5^2 = \frac{1}{4}$$

•) Dando 3 risposte è necessario che le risposte siano tutte esatte.

$$p_3(3) = \binom{3}{3}(0{,}5)^3 = \frac{1}{8}$$

Rispondendo a caso conviene dare due risposte esplicite.

•) Dando 4 risposte, l'esame è superato se le risposte sono tutte corrette oppure se le risposte sono tre esatte ed una errata.

La probabilità cercata vale:

$$p_4(4) + p_4(3) = \frac{1}{16} + \binom{4}{3}(0{,}5)^4 = \frac{1}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

•) Dando 5 risposte l'esame è superato se esse sono tutte esatte, oppure se le risposte esatte sono 4.

Si ha

$$p_5(5) + p_5(4) = \frac{1}{32} + 5\times(0{,}5)^5 = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$