 LEZIONE (14) 22/06/09

II prova in itinere MN - 26/06/09

Esercizio n. 1

2 v.c. indipendenti

$$Y_1 \sim N(\mu, 1) \qquad Y_2 \sim N(\mu, 2)$$

Si definisca $\theta^0 := \mu$

e si considerino i seguenti stimatori

$$\hat{\theta}_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2} \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{Y_1 + Y_2}{3}$$

a) <u>Calcolare media e varianza di $\hat{\theta}_1$</u>

$$\text{media} := E[\hat{\theta}_1] = E\left[\frac{Y_1 + Y_2}{2}\right] = \frac{1}{2} E[Y_1] + \frac{1}{2} E[Y_2] = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu = \mu$$

È uno stimatore non polarizzato.

$$Var[\hat{\theta}_1] = Var\left[\frac{1}{2}(Y_1 + Y_2)\right] = \frac{1}{4}\left[Var[Y_1] + Var[Y_2]\right] = \frac{1}{4}(1 + 2) = \frac{3}{4}$$

Essendo le due v.c. indipendenti la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze.

b) <u>Calcolare media e varianza di $\hat{\theta}_2$</u>

$$\text{media} := E[\hat{\theta}_2] = E\left[\frac{1}{3}(Y_1 + Y_2)\right] = \frac{1}{3}\left[E[Y_1] + E[Y_2]\right] = \frac{1}{3}[\mu + \mu] = \frac{2}{3}\mu$$

È uno stimatore polarizzato non essendo uguale ad μ il suo valore atteso.

$$Var[\hat{\theta}_2] = Var\left[\frac{1}{3}(Y_1 + Y_2)\right] = \frac{1}{9}\left[Var[Y_1] + Var[Y_2]\right] = \frac{1}{9}[1 + 2] = \frac{1}{3}$$

c) Per $m = 4$ dire, motivando la risposta, quale stimatore è migliore.

Se i due stimatori fossero non polarizzati il criterio di utilizzo consisterebbe nello scegliere quello a varianza minore.

Per stimatori polarizzati si usa il criterio di qualificazione è l'MSE

$$MSE = (BIAS)^2 + Var[\hat{\theta}] \qquad \text{(pag. 165)}$$

con

$$BIAS = E[\hat{\theta}] - \theta^0$$

Si ottiene:

$$(BIAS)_1 = m - m = 0$$

$$(BIAS)_2 = \frac{2}{3} m - m = -\frac{1}{3} m$$

$$(MSE)_1 = 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$(MSE)_2 = \left(-\frac{m}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{m^2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{(4)^2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{19}{9}$$

$$(MSE)_2 > (MSE)_1$$

Lo stimatore migliore è $\hat{\theta}_1$

Se m fosse piccolo lo stimatore migliore potrebbe essere il secondo

---

Esercizio n. 2 (stessa prova)

Dati X_i $(i = 1 \dots N)$ i.i.d. $\sim N(m, \sigma^2)$ dei quali è stata calcolata la ~~[illegible]~~ media campionaria, con σ^2 nota, si considerino i casi:

1. $N = 16$ $\sigma^2 = 1$ 2. $N = 25$ $\sigma^2 = 4$ 3. $N = 25$ $\sigma^2 = 9$

Si considerino anche i casi in cui σ^2 è sconosciuta ed è stata calcolata la varianza campionaria S^2.

4. $N = 16$ $S_c^2 = 1$ 5. $N = 25$ $S_c^2 = 4$ 6. $N = 25$ $S_c^2 = 9$

Si indichi con $A = U - L$ l'ampiezza dell'intervallo di confidenza con L e U limite inferiore e superiore, con

$$I_{0.95} = [L, U]$$

Date le seguenti ampiezze, indicare il numero del

228 caso corretto.

$$I_{0,95} = [L, U] = \left[M_1 - 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , M_1 + 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$ (varianza nota)

$$A = U - L = 2 \times 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

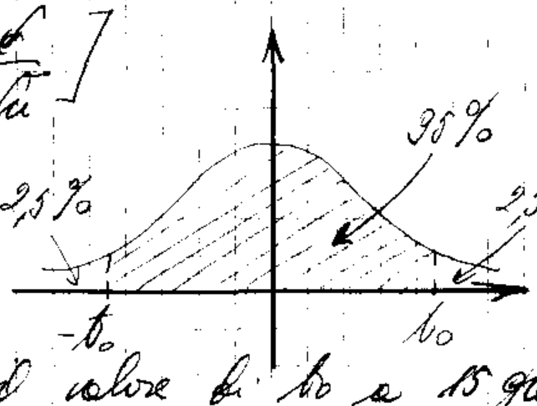
Caso 1: $\underline{A = 0{,}9800}$

Caso 2: $\underline{A = 1{,}5680}$

Caso 3: $\underline{A = 2{,}3520}$

$$I_{0,95} = \left[M_1 - t_0 \frac{S}{\sqrt{n}} , M_1 + t_0 \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$A = 2 t_0 \frac{S}{\sqrt{n}}$$



t_0 è la t di Student ad $n-1$ gradi di libertà.

Per il caso 4 occorre cercare il valore di t_0 a 15 gradi di libertà nella colonna 0,05

$t_0 = 2{,}131$ $\quad A = 2 \times 2{,}131 \times \frac{1}{\sqrt{16}} = \underline{1{,}0655}$

Caso 5: $t_0 = 2{,}064$

$\underline{A = 1{,}6512}$

Caso 6: $t_0 = 2{,}064$ $\quad A = 2{,}4768$

Esercizio 3 (stessa prova)

Dati: $y(1) = 4$ $\quad y(2) = 6$ $\quad y(3) = 4$

$x(1) = -1$ $\quad x(2) = 0$ $\quad x(3) = 1$

Si considera il modello

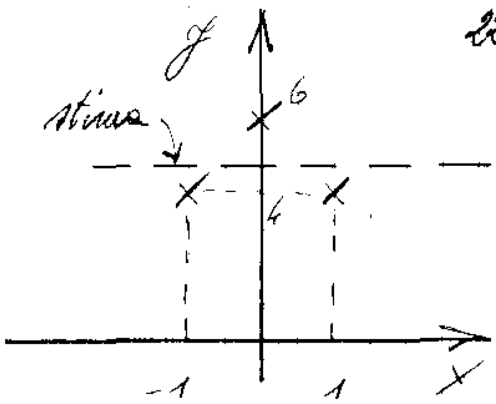
$$y(t) = \theta_1 + \theta_2 x(t) + v(t) \qquad t = 1, 2, 3$$

con $v(t) \sim N(0, \sigma^2)$

a) Calcolare la stima di Gauss-Markov di θ

Dal grafico che rappresenta i dati (pag. 229) si nota che la retta cercata deve essere orizzontale ($\theta_2 = 0$).

Le equazioni $y(i)$ sono



$$y(1) = \theta_1 \cdot 1 + x(1)\theta_2 + v(1)$$
$$y(2) = \theta_1 \cdot 1 + x(2)\theta_2 + v(2)$$
$$y(3) = \theta_1 \cdot 1 + x(3)\theta_2 + v(3)$$

$$Y = \Phi\theta + V$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & x(1) \\ 1 & x(2) \\ 1 & x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \end{bmatrix} \quad \mathrm{Var}[V] = \sigma^2\Psi = \sigma^2 I$$

(pag. 207 e 208)

La soluzione è

$$\theta^M = (\Phi^T \cancel{\Psi^{-1}} \Phi)^{-1} \Phi^T \cancel{\Psi^{-1}} Y = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y$$

$$(\Phi^T\Phi)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\theta^M = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Risulta $\theta_2 = 0$ e $\theta_1 = \frac{14}{3}$, con θ_2 = coefficiente angolare della retta

θ_1 è l'intercetta e risulta la media delle Y_i.

b) Calcolare la stima di σ^2

per stimatori non polarizzati risulta:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\varepsilon^T \Psi^{-1} \varepsilon}{n - p}$$

nel nostro caso: $\hat{\sigma}^2 = \frac{\varepsilon^T\varepsilon}{n-\rho} = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}{n-\rho}$, con

$$\varepsilon = Y - \Phi\theta^M =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{14}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{14}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

Risulta

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9}}{3-2} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

c) Calcolare la stima di $Var[\vartheta^M]$

$$Var[\vartheta^M] = \hat{\sigma}^2 (\Phi^T \Psi^{-1} \Phi)^{-1} = \hat{\sigma}^2 (\Phi^T \Phi)^{-1} =$$

$$= \frac{8}{3} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/9 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

N.B.: quando occorre eseguire una stima e non si conosce σ^2 si usa $\hat{\sigma}^2$.

Calcoliamo l'intervallo di confidenza per i parametri. Non essendo nota σ^2, occorre ricorrere alla t di Student, ad $(n-q)$ gradi di libertà.

$$I_{0,95}(\vartheta_1^M) = [\vartheta_1^M - t_0 \hat{\sigma}_{\vartheta_1^M}, \vartheta_1^M + t_0 \hat{\sigma}_{\vartheta_1^M}] =$$

$$= \left[\frac{14}{3} - t_0 \sqrt{\frac{8}{9}}, \frac{14}{3} + t_0 \sqrt{\frac{8}{9}}\right]$$

Risulta $t_0 = 12,706$ e

$$I_{0,95}(\vartheta_1^M) = \left[\frac{14}{3} - 12,706\sqrt{\frac{8}{9}}, \frac{14}{3} + 12,706\sqrt{\frac{8}{9}}\right] =$$

$$= \left[\frac{14}{3} - 11,98, \frac{14}{3} + 11,98\right]$$

$$I_{0,95}(\vartheta_2^M) = \left[0 - 12,706\sqrt{\frac{4}{3}}, 0 + 12,706\sqrt{\frac{4}{3}}\right] =$$

$$= [-14,67, 14,67]$$

d) scegliere tra il modello proposto e il modello

$$y(t) = \vartheta_1 + v(t)$$

col criterio FPE.

Il criterio FPE genera una costante

$$FPE = \frac{N+q}{N-q}\, SSR \qquad SSR =$$

$$(FPE)_1 = \frac{3+1}{3-1}\, SSR = \frac{4}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$(FPE)_2 = \frac{3+2}{3-2}\, SSR = 5\cdot\frac{8}{3} = \frac{40}{3}$$

E' preferibile il modello più semplice.

Esercizio 4 (stessa prova)

a) $Var[M_1] = \frac{\sigma^2}{n}$ (pag. 151)

$E[S^2] = \sigma^2$ (pag. 158)

L'affermazione è <u>VERA</u>

b) I momenti campionari sono sempre divisi per n e non per $(n-1)$

$$S_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_1)^2 \qquad \text{(pag. 151)}$$

e risulta polarizzato, poiché $E[S_2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ (pag. 158)

L'affermazione è <u>FALSA</u>

c) $A = 2\delta = 2 \times 1{,}96\, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (inversamente proporzionale alla radice di n) <u>FALSA</u>

d) $Var[\hat{\theta}] = \frac{\sigma^2}{n}$ (pag. 161)

la quantità di informazione di Fisher è

$$I = \frac{n}{\sigma^2} \qquad \text{(pag. 161)}$$

L'affermazione è <u>FALSA</u>

e) Definizione:

$$M_2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \qquad \text{(pag. 151)}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \text{ essendo le } X_i \text{ delle v.c. gaussiane standard}$$

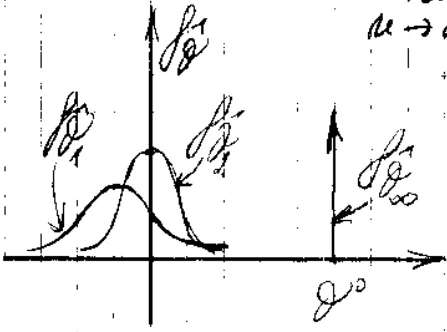
$$= \frac{\chi_n^2}{n}$$

232 L'affermazione è falsa essendo

$$M_2 = \frac{\chi^2}{n} \neq \chi^2$$

f) Significato della non polarizzazione asintotica: il valore atteso dello stimatore, asintoticamente, tende al valore vero del parametro

$$\lim_{n \to \infty} E[\hat{\theta}] = \theta^0 \qquad \text{(pag. 150)}$$



La consistenza garantisce che la f.d. tende a diventare una delta di Dirac $f_{\hat\theta_\infty}$ posizionata nel valore di θ^0.

La non polarizzazione garantisce a sua volta che il baricentro della d.f. coincide con il valore vero del parametro.

L'affermazione è <u>VERA</u>.

g) Si sa che

$$\theta^{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \qquad \text{(pag. 196)}$$

$$\theta^{M} = (\Phi^T \Psi^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \Psi^{-1} Y \qquad \text{(pag. 208)}$$

Ne consegue che, se $\Psi = I$, allora

$$\theta^M = \theta^{LS}$$

Se $\Psi = k I$, risulta:

$$\theta^M = \left(\Phi^T \frac{1}{k} I^{-1} \Phi\right)^{-1} \Phi^T k^{-1} I^{-1} Y =$$

$$= k (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \frac{1}{k} Y = \theta^{LS}$$

con k valore qualsiasi.

Dunque se $\Psi \equiv I \Rightarrow \theta^M = \theta^{LS}$

Dire che Ψ è diagonale, non significa che essa risulti proporzionale alla matrice identità.

L'affermazione è <u>FALSA</u>.

h) Per l'identificabilità deve essere (pag. 212)

$$\mathrm{rank}(\Phi) = q$$

Supponendo $n=4$, $q=3$ e $\operatorname{rank}(\Phi)=2$, la condizione non è soddisfatta.

L'affermazione è <u>FALSA</u>

i) Lo stimatore di Gauss-Markov non ha bisogno della gaussianità di v per essere BLUE. Infatti si appoggia all'ipotesi I_2 e sulle proprietà delle medie e delle varianze.

La media non deve essere polarizzata e la varianza deve essere la più piccola possibile. (pag. 206).

L'affermazione è <u>VERA</u>

l) FPE e AIC non sono stimatori consistenti dell'ordine del modello, mentre MDL lo è.

Quando il numero dei dati tende all'infinito MDL permette al modello di convergere al valore vero.

L'affermazione è <u>FALSA</u>.

 II prova in itinere - AV - 27/06/08

Esercizio 2

- n = length(y)

corretta: calcola la lunghezza del vettore colonna Y

- Phi = [ones(n) x x.^2]

non corretta: ones(n) crea una matrice quadrata di ordine n composta da tutti uni.

Serve invece solo una colonna di uni con l'istruzione

ones(n,1)

l'istruzione va riscritta così

Phi = [ones(n,1) x x.^2]

- thetaBLUE = Y/Phi

è errata: serve l'istruzione Phi\Y che equivale a

thetaBLUE = inv(Phi' * Phi) * Phi' * Y

- epsilon = x - Phi * thetaBLUE

errata: occorre y al posto di x.

- SSR = epsilon' * epsilon

corretta

- sigma2hat = SSR/(n-2)

errata: occorre dividere per (n-3) essendo tre i parametri (p).

Esercizio 1 (stessa prova in itinere)

a) $\theta^M = CY \qquad C = (\Phi^T \Psi^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \Psi^{-1}$

b) la d.d.p. di θ^M è gaussiana: sotto l'ipotesi I_1

$Y = \Phi\theta^o + V \qquad$ con $V \sim N(0, \sigma^2 \Psi)$

V è gaussiana e $\Phi\vartheta^o$ è un termine deterministico.

Anche Y è gaussiana

$$Y \sim N\left(\Phi\vartheta^o, \sigma^2\Psi\right)$$

Rispetto a V, Y è spostato di $\Phi\vartheta^o$.

Considerando che $\vartheta^M = cY$ con c matrice ϑ^M risulta una combinazione lineare di una v.c. gaussiana (Y) e pure ϑ^M è una v.c gaussiana.

ϑ^M è perciò un vettore di v.c. congiuntamente gaussiane

Risulta: $E[\vartheta^M] = c\,E[Y]$

$$\mathrm{Var}[\vartheta^M] = c\,\mathrm{Var}[Y]\,c^T \quad \text{(pag. 144)}$$

Quando c una matrice non si può considerare

$$\mathrm{Var}[cY] = c^2\,\mathrm{Var}[Y]$$

come nel caso di c scalare.

ϑ^M è uno stimatore non polarizzato

$$E[\vartheta^M] = \vartheta^o$$

Risulta

$$\mathrm{Var}[\vartheta^M] = c\,\mathrm{Var}[\Phi\vartheta^o + V]\,c^T =$$
$$= c\,\mathrm{Var}[V]\,c^T = c\,\sigma^2\Psi\,c^T$$

$\Phi\vartheta^o$ è un vettore di costanti e non influisce nel calcolo della varianza

Perciò: $\mathrm{Var}[\vartheta^M] = \left(\Phi^T\Psi^{-1}\Phi\right)^{-1}\Phi^T\Psi^{-1}\cdot\sigma^2\Psi\cdot$

$$\cdot\left[\left(\Phi^T\Psi^{-1}\Phi\right)^{-1}\Phi^T\Psi^{-1}\right]^T =$$

$$= \sigma^2\left(\Phi^T\Psi^{-1}\Phi\right)^{-1}\Phi^T\underbrace{\cancel{\Psi^{-1}\Psi}}_{=I}\cdot\left(\Psi^{-1}\right)^T\cdot\Phi\cdot\left[\left(\Phi^T\Psi^{-1}\Phi\right)^{-1}\right]^T$$

Per eseguire il trasposto di un prodotto di matrici, occorre eseguire il prodotto dei trasposti, ma in ordine inverso, come ad esempio

$$(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$$

Risulta:

$$Var[\theta^M] = \sigma^2 (\Phi^T \Psi^{-1} \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T \Psi^{-1} \Phi [(\Phi^T \Psi^{-1} \Phi)^{-1}]^T$$

Ricordiamo che Ψ è una matrice simmetrica (pag. 204), e la sua inversa è ancora simmetrica, trasponendo la quale si ottiene ancora una matrice simmetrica. Perciò

$$(\Psi^{-1})^T = \Psi^{-1}$$

Osserviamo che

$$(\Phi^T \Psi^{-1} \Phi)^{-1} \cdot (\Phi^T \Psi^{-1} \Phi) = I$$

Perciò:

$$Var[\theta^M] = \sigma^2 \cdot [(\Phi^T \Psi^{-1} \Phi)^T]^{-1} =$$

$$= \sigma^2 [\Phi^T (\Psi^{-1})^T \cdot \Phi]^{-1} =$$

$$= \sigma^2 (\Phi^T \Psi^{-1} \cdot \Phi)^{-1}$$

Si ottiene la formula di pag. 208.

Esercizio 5. (stessa prova)

a) da pag. 163:

$$MSE = (BIAS)^2 + Var[\hat{\theta}]$$

$$MSE(\hat{\theta}_1) = (BIAS_1)^2 + Var[\hat{\theta}_1]$$

$$MSE(\hat{\theta}_2) = (BIAS_2)^2 + Var[\hat{\theta}_2]$$

Supponiamo che $\hat{\theta}_1$ non sia polarizzato.

$$MSE(\hat{\theta}_1) = Var[\hat{\theta}_1] \qquad (BIAS_1)^2 = 0$$

$$MSE(\hat{\theta}_1) = MSE(\hat{\theta}_2)$$

$$Var[\hat{\theta}_1] = (BIAS_2)^2 + Var[\hat{\theta}_2]$$

$$Var[\hat{\theta}_2] = Var[\hat{\theta}_1] - (BIAS_2)^2$$

$$Var[\hat{\theta}_2] < Var[\hat{\theta}_1]$$

L'affermazione è <u>VERA</u>

b) Sappiamo che $X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ (pag. 154)

$$X^T X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \chi^2_n$$

L'affermazione è VERA

c) $M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$ (pag. 151)

Definendo $Y_i := X_i^k$ (pag. 159), M_k diventa la media campionaria delle Y_i e ne eredita le proprietà (eredita le proprietà della media campionaria).

La media campionaria è non polarizzata (pag. 136) e per il teorema centrale del limite la somma delle Y_i diventa asintoticamente gaussiana.

L'affermazione è VERA

d) La d.d.p. gaussiana è distribuita su tutto l'asse reale.

La varianza campionaria è una media di valori elevati al quadrato e non può mai essere negativa (pag. 158).

L'affermazione è FALSA.

e) $(BIAS)_1 = 1$ $\quad (BIAS)_2 = 2$

$Var[\hat{\theta}_1] = 3$ $\quad Var[\hat{\theta}_2] = 1$

$(MSE)_1 = (BIAS)_1^2 + Var[\hat{\theta}_1] = 1 + 3 = 4$

$(MSE)_2 = (BIAS)_2^2 + Var[\hat{\theta}_2] = 4 + 1 = 5$

Essendo $(MSE)_2 > (MSE)_1$ l'affermazione è FALSA.

f) Il "se" è vero: se le X_i sono gaussiane anche la media campionaria lo è essendo una combinazione lineare delle stesse.

Il "solo se" deve valere per ogni valore di n. Se $n = 1$ la media campionaria coincide con X_1 e dunque, affinché M_1 sia gaussiana lo deve essere la X_1.

g) L'intervallo di confidenza ha un'ampiezza che dipende da

$$\delta = 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

e quindi non dipende dai dati.

L'affermatione e' VERA.

h) $$Avar[\theta^M] = \sigma^2 (\Phi^T \Psi^{-1} \Phi)^{-1} \quad (\text{pag. } 208)$$
Non c'e' alcuna ragione perche' la matrice varianza dei parametri debba essere diagonale. Nel caso generale la matrice e' piena.

L'affermazione e' FALSA

i) Om rappresenta lo stimatore BLUE, dove B significa "best" ed e' riferito alla varianza.

L'affermatione sembrerebbe vera, ma la terza lettera, U, indica "unbiased", si può, percio', trovare uno stimatore con varianza minore, ma polarizzato.

L'affermatione, a questo punto sembrerebbe falsa.

Leggendo però attentamente la domanda non si fa alcun cenno alla polarizzazione e ci si limita a considerare la varianza.

L'affermatione e' VERA

l) L'affermatione e' FALSA essendo

$$FPE = \frac{n+q}{n-q} \, SSR$$

Esercizio 3

a) $$Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & t(1) \\ 1 & t(2) \\ 1 & t(3) \\ 1 & t(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Essendo $v(t)$ i.i.d. gli errori sono tutti incorrelati. Perciò

$$Var[V] = \sigma^2 \quad e \quad \Psi = I$$

con

$$Var[V] = 2$$

$$\theta^M = \left(\Phi^T \cancel{\Psi^{-1}} \Phi\right)^{-1} \Phi^T \cancel{\Psi^{-1}} Y$$

$$\left(\Phi^T \Phi\right)^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

$$\theta^M = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

b) $$Var[\theta^M] = \sigma^2 \left[\Phi^T \cancel{\Psi^{-1}} \Phi\right]^{-1} = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

c) Occorre calcolare il vettore dei residui

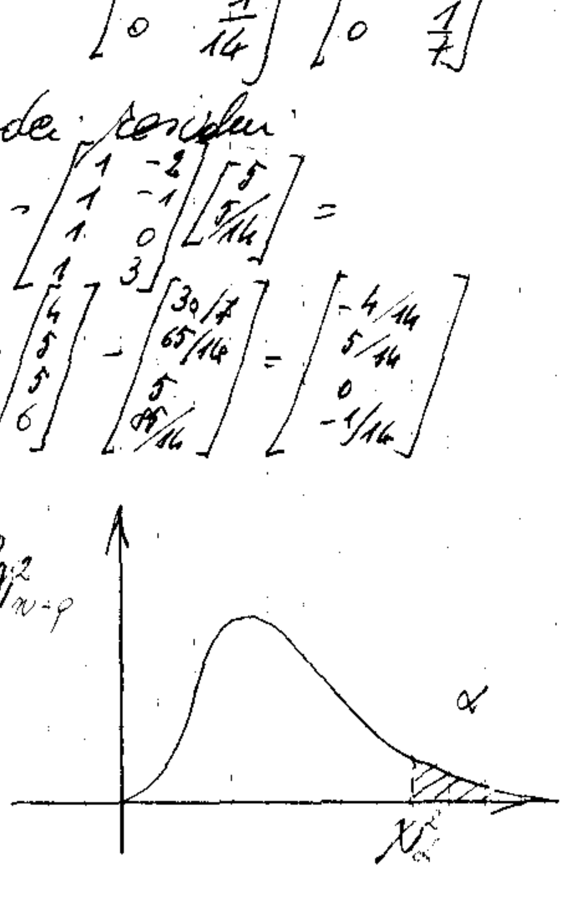
$$\varepsilon = Y - \Phi\theta^M = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5/14 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 - 10/14 \\ 5 - 5/14 \\ 5 \\ 5 + 15/14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30/7 \\ 65/14 \\ 5 \\ 85/14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/14 \\ 5/14 \\ 0 \\ -1/14 \end{bmatrix}$$

Serve verificare che

$$\frac{\varepsilon^T \varepsilon}{\sigma^2} < \chi^2_\alpha$$

$f_{\chi^2_{n-p}}$



Consideriamo $\alpha = 0{,}05$ e consideriamo la tabella dei χ^2 a $n-p = 4-2 = 2$ gradi di libertà. Alla riga 2 e colonna 0,05 si trova che

Dato il valore critico è pari a 5,991.

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\frac{4}{14} & \frac{5}{14} & 0 & -\frac{1}{14}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{4}{14}\\ \frac{5}{14}\\ 0\\ -\frac{1}{14}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\,\frac{16+25+0+1}{196} = \frac{42}{196}\,\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{21}{196} < 5,991$$

Il modello è validato

II prova in itinere - 29/06/07

Esercizio 2

$$\Phi = \begin{bmatrix}\sin(x_1) & \cos(x_1)\\ \sin(x_2) & \cos(x_2)\\ \sin(x_3) & \cos(x_3)\\ \sin(x_4) & \cos(x_4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

σ^2 non è indicato, perciò $\sigma^2 = 1$

a) $\Psi = 0,5\, I$

$$Var[\theta^M] = \sigma^2\left[\Phi^T \Psi^{-1} \Phi\right]^{-1} =$$

$$= 1.\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{0,5\cdot I}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)^{-1} =$$

$$= 2^{-1}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

<u>2ª proposta</u>

b) $\Psi = 2I$

$$Var[\theta^M] = 1\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{2I}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)^{-1} =$$

$$= 2\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^{-1} = 2\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

<u>1ª proposta</u>

c) $\Psi = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \Psi^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

$$Var[\hat\vartheta^M] = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4ª proposta

d) $\Psi = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0{,}5 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0{,}5 \end{bmatrix}$ $\quad \Psi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$

$$Var[\hat\vartheta^M] = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

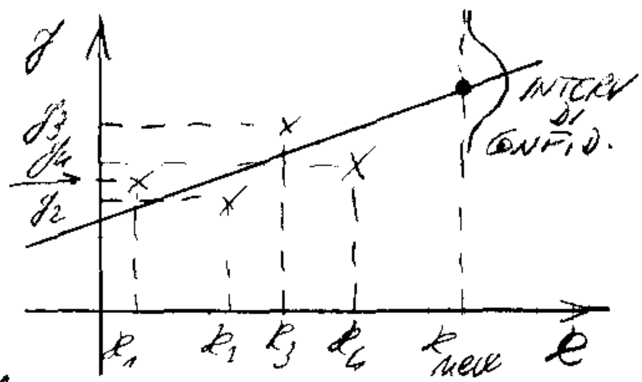
5ª proposta

---

quesito)

Si supponga di aver calcolato $\hat\vartheta$ e $Var[\hat\vartheta]$.

Si vuol usare il predittore determinato per predire il valore di y corrispondente ad un determinato k_{new} non incluso nei dati precedentemente utilizzati.



Dopo aver previsto il valore y_{new} corrispondente ad k_{new}, occorre calcolare anche l'intervallo di confidenza.

L'obiettivo consiste nel calcolare $Var[\hat y_{new}]$ per poi determinare l'intervallo di confidenza.

242

$$Var[\hat{\vartheta}] = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \hat{\sigma}_{12} \\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y}_{new} = \hat{\vartheta}_1 + \hat{\vartheta}_2 x_{new}$$ (modello lineare)

$$\hat{y}_{new} = \begin{bmatrix} 1 & x_{new} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\vartheta}_1 \\ \hat{\vartheta}_2 \end{bmatrix} = A\hat{\vartheta}$$ (in forma matriciale)

$$Var[\hat{y}_{new}] = A\, Var[\hat{\vartheta}]\, A^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x_{new} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \hat{\sigma}_{12} \\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_{new} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_{21} x_{new} & \hat{\sigma}_{12} + \hat{\sigma}_2^2 x_{new} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_{new} \end{bmatrix} =$$

$$= \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_{21} x_{new} + \hat{\sigma}_{12} x_{new} + \hat{\sigma}_2^2 x_{new}^2 =$$

$$= \hat{\sigma}_2^2 x_{new}^2 + 2\hat{\sigma}_{12} x_{new} + \hat{\sigma}_1^2$$