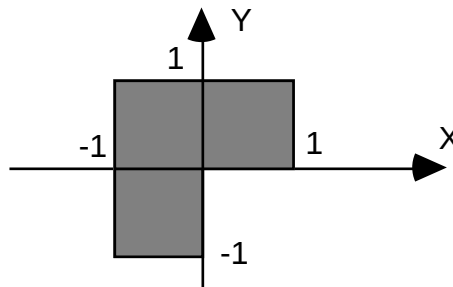


Identificazione dei Modelli (MN)

4/9/2003

1. Si considerino le due V.C. X e Y , coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile nella regione tratteggiata.



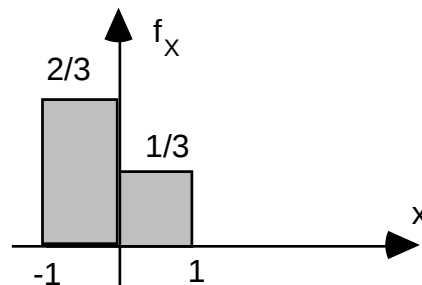
- 1.a Ricavare e tracciare il grafico di $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

Dato che lo spazio degli esiti è equiprobabile, $f_{XY}(x,y) = 1/3$, nella regione tratteggiata, $f_{XY}(x,y) = 0$, altrove

$$f_X(x) = \int_{-1}^1 1/3 \, dy = 2/3, \quad -1 \leq x \leq 0$$

$$f_X(x) = \int_0^1 1/3 \, dy = 1/3, \quad 0 \leq x \leq 1$$

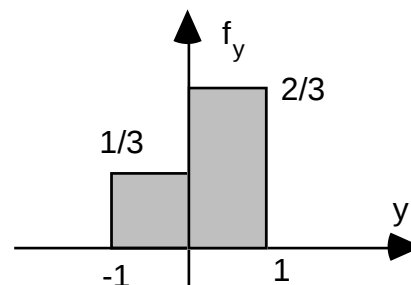
$$f_X(x) = 0, \text{ altrove}$$



$$f_Y(y) = \int_{-1}^0 1/3 \, dx = 1/3, \quad -1 \leq y \leq 0$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 1/3 \, dx = 2/3, \quad 0 \leq y \leq 1$$

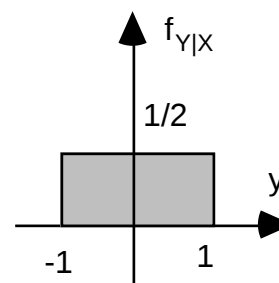
$$f_Y(y) = 0, \text{ altrove}$$



- 1.b Ricavare e tracciare il grafico di $f_{Y|X}(y | X=-0.5)$ e $f_{Y|X}(y | X=0.5)$.

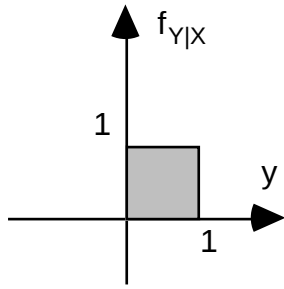
$$f_{Y|X}(y | X=-0.5) = \frac{f_{XY}(-0.5, y)}{f_X(-0.5)} = 1/2, \quad -1 \leq y \leq 1$$

$$f_{Y|X}(y | X=-0.5) = 0, \text{ altrove}$$



$$f_{Y|X}(y | X=1) = \frac{f_{XY}(1, y)}{f_X(1)} = 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$f_{Y|X}(y | X=1) = 0, \text{ altrove}$$



1.c Dire, motivando la risposta, se X e Y sono indipendenti.

Non sono indipendenti, perché $f_{Y|X}(y | X=x)$ dipende da x .

2. Sia $Z = X + Y$, dove X e Y sono V.C. indipendenti con d.d.p. $f_X(x)$ e $f_Y(y)$, rispettivamente.

2.a Scrivere l'espressione di $f_Z(z)$.

2.b Dimostrare la risposta data al punto precedente.

3. Ricavare l'espressione dell'intervallo di confidenza per la media campionaria di V.C. i.i.d. gaussiane con varianza nota.

4. Si consideri un segnale $y(t)$ di cui sono disponibili le seguenti misure:

$$y(0) = -0.6 \quad y(\pi/2) = -0.5 \quad y(\pi) = 0.4 \quad y(-\pi) = 0.5$$

Il modello è:

$$y(t_k) = \theta \sin(t_k) + v_k$$

dove v_k indica degli errori di misura.

- 4.a Calcolare la stima LS di θ .

$$\mathbf{Y} = [-0.6 \quad -0.5 \quad 0.4 \quad 0.5]' , \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

$$\theta^{LS} = (\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}'\mathbf{Y} = -0.5$$

- 4.b Supponendo che gli errori di misura v_k abbiano valor medio nullo e siano tra loro incorrelati con $\text{Var}[v_1]=\text{Var}[v_2]=\text{Var}[v_3]=\text{Var}[v_4]=2$, calcolare la stima BLUE di θ .

$$\text{Var}[\mathbf{V}] = \sigma^2 \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = 1$$

$$\theta^{BLUE} = (\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{Y} = -0.5 = \theta^{LS}$$

- 4.c Calcolare la matrice varianza dei parametri stimati per la stima BLUE del punto precedente.

$$\text{Var}[\theta^{BLUE}] = \sigma^2(\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Phi})^{-1} = 2$$