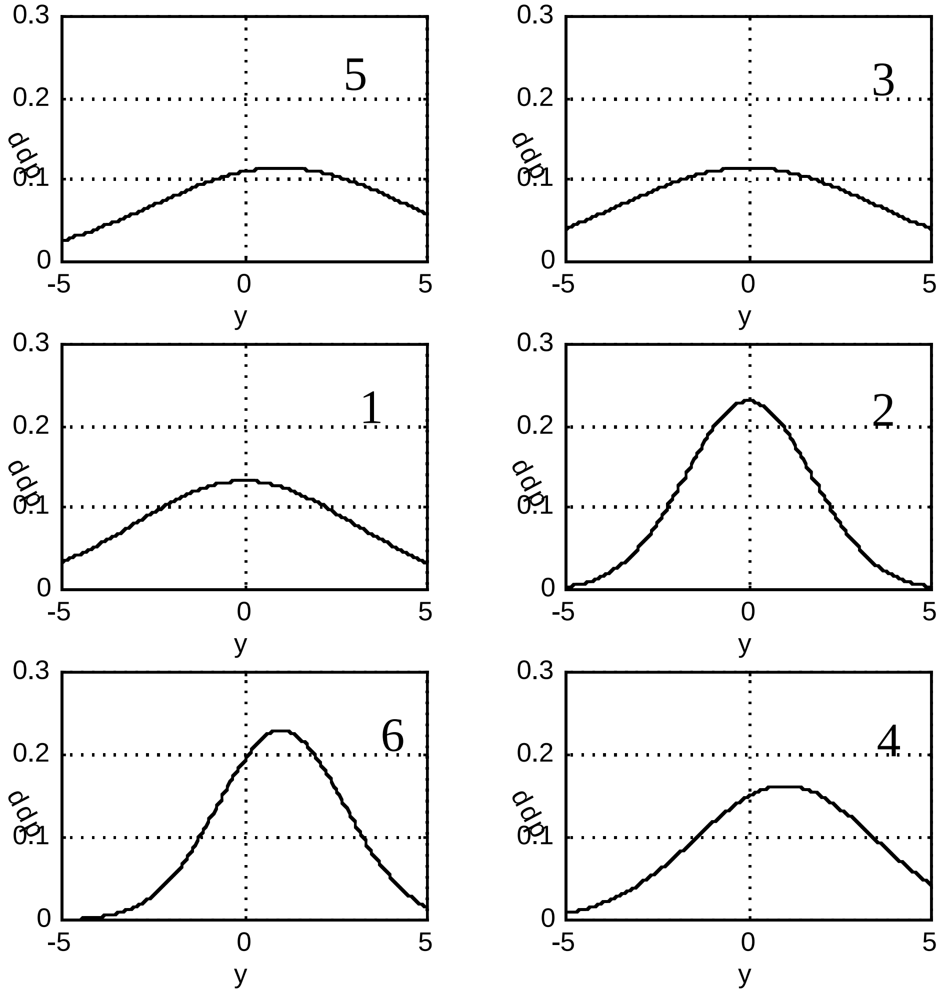
Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte I) **5/9/2003**

1. Sia $Y = \alpha X + \beta Z + \gamma$, dove $X \sim N(0,2)$, $Z \sim N(0,1)$ sono V.C. indipendenti. Si considerino le seguenti scelte per i parametri α, β, γ:

1) $\alpha = 2$,	$\beta = 1$,	$\gamma = 0$	2) $\alpha = -1$,	$\beta = 1$,	$\gamma = 0$
3) $\alpha = 2$,	$\beta = 2$,	$\gamma = 0$	4) $\alpha = -1$,	$\beta = 2$,	$\gamma = 1$
5) $\alpha = 2$,	$\beta = 2$,	$\gamma = 1$	6) $\alpha = -1$,	$\beta = 1$,	$\gamma = 1$

Riportare sopra i seguenti grafici della densità di probabilità di Y il numero della corrispondente tripletta α,β,γ.



2. La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , i = 1,…,N, $Var[X_i] = \sigma^2$, è risultata essere uguale a 10.

Si considerino le seguenti alternative per i valori di N e σ^2:

1. N= 25 σ^2= 4	2. N = 16 σ^2= 16	3. N = 25 σ^2= 16
4. N= 16 σ^2= 1	5. N = 25 σ^2= 1	6. N =16 σ^2= 4

Scrivere nei riquadri accanto agli intervalli di confidenza al 95% per la media il numero della scelta corretta

5 [9.6080 10.3920]	3 [8.4320 11.5680]
6 [9.0200 10.9800]	4 [9.5100 10.4900]
1 [9.2160 10.7840]	2 [8.0400 11.9600]

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Se X è una V.C. lognormale, allora $Y = \log(X)$ è una V.C. distribuita in modo gaussiano.

  ■ ❑

- Essendo X e Y due V.C congiunte, si definiscano $V = 5+X$, $W = 6+Y$; allora, $r_{VW} = r_{XY}$.

  ■ ❑

- Date due V.C. congiunte X e Y, $E[X^2+Y] \neq E[X^2]+E[Y]$.

  ❑ ■

- Se $Y = \Phi\theta+V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = \sigma^2 I$, allora la stima BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) dipende da σ^2.

  ❑ ■

- Si consideri il modello $y_k=\theta x_k+v_k$, $k=1,\ldots,N$, dove x_k sono noti e v_k sono errori di misura. Allora $\theta^{LS}=\sum_{k=1}^{N} y_k x_k / \sum_{k=1}^{N} x_k^2$.

  ■ ❑

- Nella stima BLUE, quando $Var[V] = \sigma^2 I$, una stima non polarizzata di σ^2 è data da SSR/N, dove q è il numero di parametri del modello.

  ❑ ■

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [M_1-1.96\sigma\sqrt{N}, M_1+1.96\sigma\sqrt{N}]$.

  ❑ ■

- La probabilità che il tempo di attesa tra due eventi di Poisson sia maggiore o uguale a T è pari a $\exp(-\lambda T)$.

  ■ ❑

- Se $Z=X+Y$ con $Y=3X$, allora $f_Z(z) = f_X(z/3)/3$.

  ❑ ■

- Date due V.C. congiunte X e Y incorrelate, la ddp della V.C. $Z = X+Y$ è la convoluzione della ddp di X e della ddp di Y.

  ❑ ■

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte II) 5/9/2003

1. Sia

$$y(t) = 0.5\, y(t-1) + w(t) + 2w(t-1)\,, \quad w(\cdot) \sim WGN(0,1)$$

1.a Dire perché y(t) converge ad un processo stazionario e determinare il valore atteso di tale processo.

$G(z) = \dfrac{z+2}{z-0.5}$: la fdt è stabile perché ha un solo polo in z = 0.5 interno al cerchio di raggio unitario.

$E[y(t)] = G(1)\, E[w(t)] = 0$

1.b Ricavare il predittore ottimo ad un passo.

G(z) non è canonico

$$T(z) = 2\frac{z+0.5}{z+2},$$

$$G(z)T(z) = 2\,\frac{z+0.5}{z-0.5}\,, \ \text{non canonico}$$

$$\hat{G}(z) = \frac{z+0.5}{z-0.5} = \frac{1+0.5\,z^{-1}}{1-0.5\,z^{-1}},\ \hat{\sigma}^2 = 4$$

$$C(z) = 1 + 0.5\, z^{-1},\ \ A(z) = 1 - 0.5\, z^{-1}$$

$$C(z)\hat{Y}(z) = [C(z) - A(z)]Y(z)$$

$$(1 + 0.5\, z^{-1})\ \hat{Y}(z) = z^{-1}\, Y(z)$$

$$\hat{y}(t\,|\,t-1) = -\,0.5\hat{y}(t-1\,|\,t-2) + y(t-1)$$

1.c Ricavare il valore atteso del processo stazionario y(t) nel caso in cui w(·) ~ WGN(1,1).

$E[y(t)] = G(1)\, E[w(t)] = 6$

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Il periodogramma è uno stimatore polarizzato.

■ ❑

- Un processo MA è stazionario se e solo se la sua funzione di trasferimento ha tutti gli zeri non esterni al cerchio di raggio unitario.

❑ ■

- Se y(t) è un processo stazionario di tipo AR(1), risulta sempre $\gamma_{yy}(\tau) > 0, \forall\tau$.

❑ ■

- La densità spettrale di potenza della somma di due processi casuali è uguale alla somma delle densità spettrali di potenza dei due processi se e solo se i due processi sono incorrelati.

■ ❑

- Lo scalino discreto (u(t)=0, t<0, u(t)=1, t≥0) è persistentemente eccitante di ordine 0.

❑ ■

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (prova sostitutiva del progetto) 5/9/2003

1. Si consideri il modello $Y = \Phi\theta + V$. Supponendo che V sia un vettore casuale a media nulla distribuito gaussianamente ($V \sim N(0,\Sigma_V)$), si discuta la stima del vettore θ mediante il metodo della massima verosimiglianza (formule per la stima, varianza dei parametri stimati, proprietà dello stimatore).