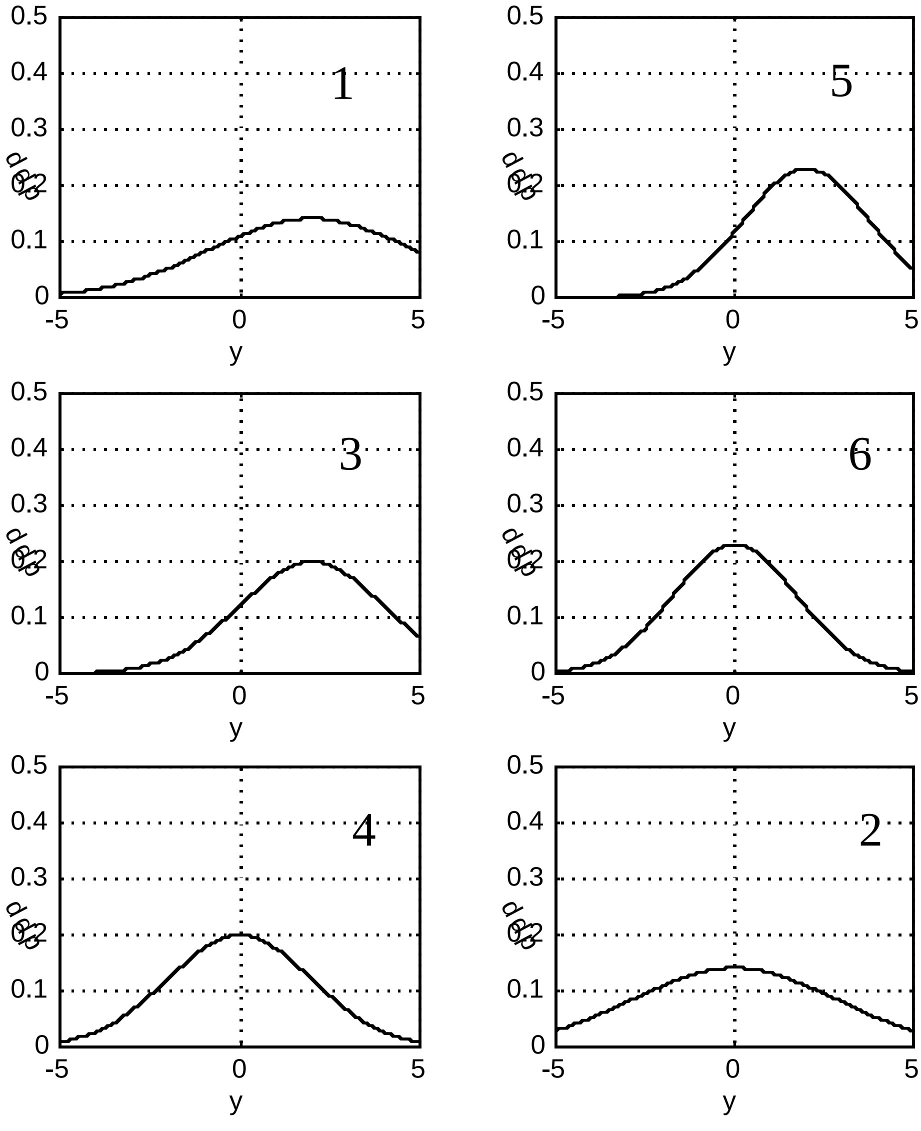
1A. Sia Y = αX + βZ + γ, dove X~N(0,1), Z~N(1,2) sono V.C. indipendenti. Si considerino le seguenti scelte per i parametri α, β, γ:

1) α = 0,	β = 2,	γ = 0	2) α = 0,	β = -2,	γ = 2
3) α = -2,	β = 0,	γ = 2	4) α = 2,	β = 0,	γ = 0
5) α = -1,	β = 1,	γ = 1	6) α = 1,	β = -1,	γ = 1

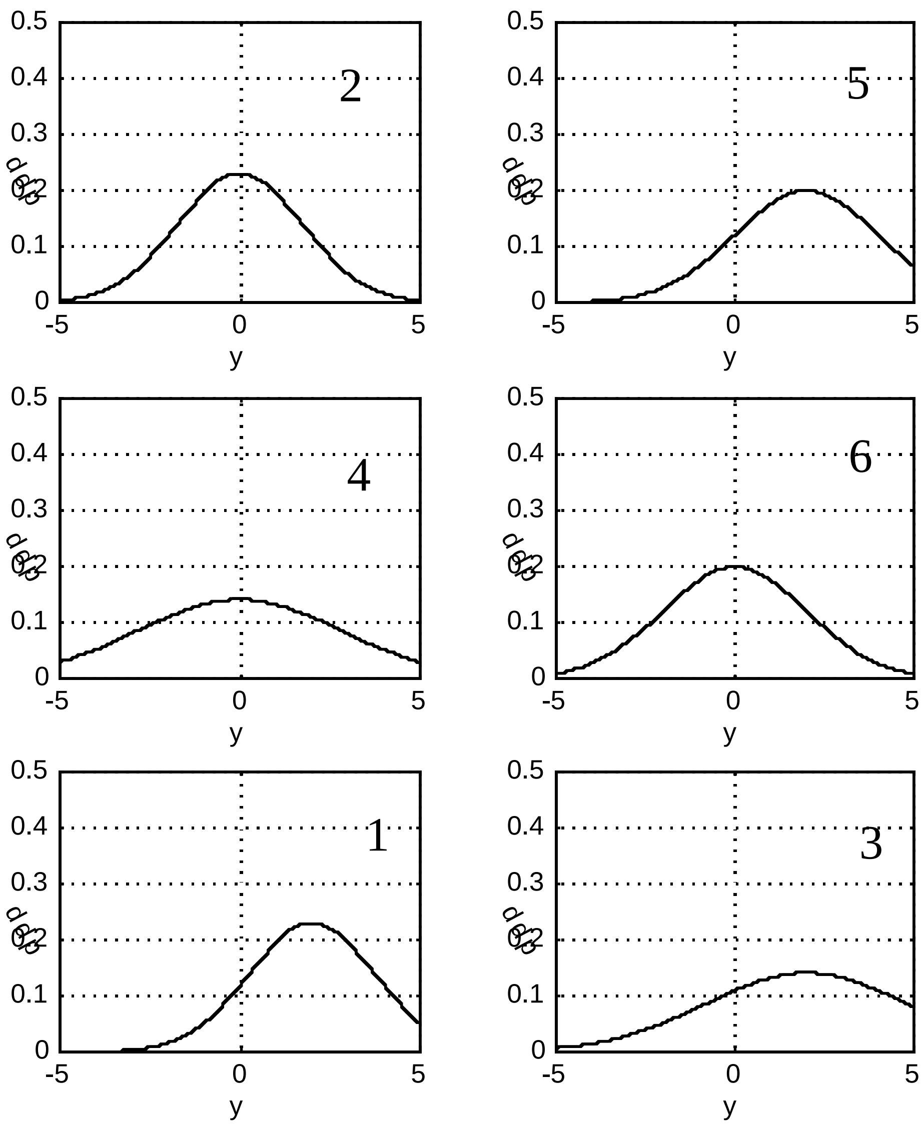
Riportare sopra i seguenti grafici della densità di probabilità di Y il numero della corrispondente tripletta α,β,γ.



1B. Sia $Y = \alpha X + \beta Z + \gamma$, dove $X \sim N(0,1)$, $Z \sim N(1,2)$ sono V.C. indipendenti. Si considerino le seguenti scelte per i parametri α, β, γ:

1) $\alpha = -1$,	$\beta = 1$,	$\gamma = 1$	2) $\alpha = 1$,	$\beta = -1$,	$\gamma = 1$
3) $\alpha = 0$,	$\beta = 2$,	$\gamma = 0$	4) $\alpha = 0$,	$\beta = -2$,	$\gamma = 2$
5) $\alpha = -2$,	$\beta = 0$,	$\gamma = 2$	6) $\alpha = 2$,	$\beta = 0$,	$\gamma = 0$

Riportare sopra i seguenti grafici della densità di probabilità di Y il numero della corrispondente tripletta α,β,γ.



2A. Si considerino i seguenti dati:

$y_1 = 3$ $y_2 = -2$ $y_3 = 0.5$
$t_1 = 0$ $t_2 = 2$ $t_3 = -1$

Vengono presi in considerazione i seguenti modelli:

1) $y_k = \theta_1 + \theta_2\, t_k + v_k$
2) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k/2) + \theta_2 + v_k$
3) $y_k = \theta_1 \cos(\pi t_k/2) + \theta_2 + v_k$
4) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k/2) + \theta_2 \cos(\pi t_k/2) + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $Var[v_1] = Var[v_3] = 1$, $Var[v_2] = 2$.

Si supponga di calcolare la stima del vettore θ dei parametri mediante lo stimatore di Gauss-Markov. Di seguito sono riportate le matrici di covarianza dei parametri stimati per tutti e quattro i casi. Scrivere nelle caselle accanto alle matrici il numero del modello corrispondente.

4 $\quad Var[\theta^M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$

1 $\quad Var[\theta^M] = \begin{bmatrix} 2/5 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

2 $\quad Var[\theta^M] = \begin{bmatrix} 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

3 $\quad Var[\theta^M] = \begin{bmatrix} 5/7 & -1/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{bmatrix}$

2B. Si considerino i seguenti dati:

$y_1 = 3$ $\quad y_2 = -2$ $\quad y_3 = 0.5$
$t_1 = 0$ $\quad t_2 = 1$ $\quad t_3 = -2$

Vengono presi in considerazione i seguenti modelli:

1) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k/2) + \theta_2 \cos(\pi t_k/2) + v_k$
2) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k/2) + \theta_2 + v_k$
3) $y_k = \theta_1 \cos(\pi t_k/2) + \theta_2 + v_k$
4) $y_k = \theta_1 + \theta_2 t_k + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $Var[v_1] = Var[v_3] = 1$, $Var[v_2] = 2$.

Si supponga di calcolare la stima del vettore θ dei parametri mediante lo stimatore di Gauss-Markov. Di seguito sono riportate le matrici di covarianza dei parametri stimati per tutti e quattro i casi. Scrivere nelle caselle accanto alle matrici il numero del modello corrispondente.

$\boxed{4}$ $$Var[\theta^M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 1/6 \\ 1/6 & 5/18 \end{bmatrix}$$

$\boxed{1}$ $$Var[\theta^M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ $$Var[\theta^M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2/5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ $$Var[\theta^M] = \begin{bmatrix} 5/2 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

3A. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

1. Due eventi A e B, con $P(B) \neq 0$, sono indipendenti se e solo se $P(A \mid B)P(B) = P(AB)$.

   ☐ ■

2. Data una coppia di dadi onesti, la probabilità che su 4 lanci esca almeno un doppio 6 è uguale a 4/36.

   ☐ ■

3. Date due V.C. X ed Y indipendenti, $F_{XY}(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y)$.

   ■ ☐

4. Se $X \sim N(m,\sigma^2)$, allora $P(X-m \leq 1.96\sigma) = 0.95$.

   ☐ ■

5. Si considerino degli eventi di Poisson con frequenza media λ. Se in $t = 0$ c'é stato un evento, la probabilità di non avere altri eventi di Poisson nell'intervallo $(0,T]$ è pari a $1-e^{-\lambda T}$.

   ☐ ■

6. Date delle V.C. $X_i \sim N(m,\sigma^2)$, la media campionaria $\bar{X}$ ha media m e varianza σ^2/N anche se le X_i non sono indipendenti.

   ☐ ■

7. Sia $Y = \Phi\theta + V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = \sigma^2\Psi$. Allora $Var[\theta^{LS}] = (\Phi'\Psi^{-1}\Phi)^{-1}$.

   ☐ ■

8. Se X ed Y sono incorrelate, $Var[X+Y] = Var[X] - Var[Y]$.

   ☐ ■

9. Siano SSR_1 e SSR_2 le somme dei quadrati dei residui associate alle stime LS dei parametri dei due modelli: 1) $y(t) = \theta_1 + v(t)$; 2) $y(t) = \theta_1 u_1(t) + v(t)$. Allora, $SSR_1 \geq SSR_2$.

   ☐ ■

10. Date due V.C. X,Y, se $E[X]E[Y] < 0$ allora $Cov[X,Y] < 0$.

   ☐ ■

3B. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

1. Date due V.C. X ed Y indipendenti, $F_{XY}(x,y) = F_X(x)\ F_Y(y)$.

■ ❑

2. Se $X \sim N(m,\sigma^2)$, allora $P(X\text{-}m \leq 1.96\sigma) = 0.95$.

❑ ■

3. Si considerino degli eventi di Poisson con frequenza media λ. Se in $t = 0$ c'é stato un evento, la probabilità di non avere altri eventi di Poisson nell'intervallo $(0,T]$ è pari a $1\text{-}e^{-\lambda T}$.

❑ ■

4. Siano SSR_1 e SSR_2 le somme dei quadrati dei residui associate alle stime LS dei parametri dei due modelli: 1) $y(t) = \theta_1 + v(t)$; 2) $y(t) = \theta_1 u_1(t) + v(t)$. Allora, $SSR_1 \geq SSR_2$.

❑ ■

5. Date due V.C. X,Y, se $E[X]E[Y] < 0$ allora $Cov[X,Y] < 0$.

❑ ■

6. Date delle V.C. $X_i \sim N(m,\sigma^2)$, la media campionaria $\bar{X}$ ha media m e varianza σ^2/N anche se le X_i non sono indipendenti.

❑ ■

7. Due eventi A e B, con $P(B) \neq 0$, sono indipendenti se e solo se $P(A|B)P(B) = P(AB)$.

❑ ■

8. Data una coppia di dadi onesti, la probabilità che su 4 lanci esca almeno un doppio 6 è uguale a 4/36.

❑ ■

9. Sia $Y = \Phi\,\theta + V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = \sigma^2\Psi$. Allora $Var[\theta^{LS}] = (\Phi'\Psi^{-1}\Phi)^{-1}$.

❑ ■

10. Se X ed Y sono incorrelate, $Var[X+Y] = Var[X] - Var[Y]$.

❑ ■