1A. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Se il numero medio di eventi di Poisson in un intervallo di 1 minuto è pari a 2, allora il numero medio di eventi in un'ora è pari a 120. ■ ❑

- Con una moneta onesta, la probabilità di ottenere 6 teste consecutive (ovvero la sequenza TTTTTT) è pari alla probabilità di ottenere la sequenza TCTCTC. ■ ❑

- La varianza di una V.C. uniforme in [-2,2] è pari a 4/3. ■ ❑

- Se P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A)P(B), allora gli eventi A e B sono indipendenti. ❑ ■

- Un urna contiene una moneta onesta ed una truccata le cui facce riportano entrambe una testa. Scelta a caso una moneta, la si lancia e si ottiene testa. Allora, la probabilità che sia onesta è 1/3.
Suggerimento: Si usi il teorema di Bayes ■ ❑

2A. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Date due V.C. X ed Y congiuntamente gaussiane a valor medio nullo, la conoscenza di Var[X], Var[Y] ed r_{XY} è sufficiente a specificare completamente la ddp congiunta $f_{XY}(x,y)$. ■ ❑

- Se lancio N volte una moneta onesta, al crescere di N il numero di teste converge in media quadratica ad N/2. ❑ ■

- Se lancio N volte una moneta onesta, al crescere di N la funzione di distribuzione del numero di teste tende a diventare gaussiana. ■ ❑

- Tra due stimatori è sempre preferibile quello che ha varianza minore. ❑ ■

- La dimostrazione che i momenti campionari delle V.C. i.i.d. X_i , i = 1,…,N, sono asintoticamente normali si basa sul teorema centrale del limite. ■ ❑

1B. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Se il numero medio di eventi di Poisson in un intervallo di 1 minuto è pari a 2, allora il numero medio di eventi in un'ora è maggiore di 120.

  ❑ ■

- Con una moneta onesta, la probabilità di ottenere 6 teste consecutive (ovvero la sequenza TTTTTT) è pari alla probabilità di ottenere la sequenza TTTCCC.

  ■ ❑

- La varianza di una V.C. uniforme in [-1,1] è pari a 1/3.

  ■ ❑

- Se P(A+B) = P(A)+P(B), allora gli eventi A e B non sono indipendenti.

  ❑ ■

- Un urna contiene una moneta onesta ed una truccata le cui facce riportano entrambe una testa. Scelta a caso una moneta, la si lancia e si ottiene testa. Allora, la probabilità che sia onesta è 1/4.
  Suggerimento: Si usi il teorema di Bayes

  ❑ ■

2B. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Date due V.C. X ed Y congiuntamente gaussiane, la conoscenza di Var[X], Var[Y] ed r_{XY} è sufficiente a specificare completamente la ddp congiunta $f_{XY}(x,y)$.

  ❑ ■

- Se lancio N volte una moneta onesta, al crescere di N il numero di teste converge in probabilità ad N/2.

  ❑ ■

- Se lancio N volte una moneta truccata con P(T) = 0.4, al crescere di N la funzione di distribuzione del numero di teste tende a diventare gaussiana.

  ■ ❑

- Tra due stimatori polarizzati è sempre preferibile quello che ha varianza minore.

  ❑ ■

- La dimostrazione che i momenti campionari delle V.C. i.i.d. X_i , i = 1,…,N, sono asintoticamente normali si basa sulla legge dei grandi numeri.

  ❑ ■

3A. Si considerino i seguenti dati:

$y_1 = 3$ $\quad y_2 = 2$ $\quad y_3 = 0$ $\quad y_4 = -1$

$t_1 = 0$ $\quad t_2 = 1$ $\quad t_3 = 3$ $\quad t_4 = 4$

ed il modello:

$y_k = \theta_1 + \theta_2\,(2 - t_k) + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $Var[v_k] = 2$.

3.a Ricavare, riportando i principali passaggi, la stima BLUE del vettore θ dei parametri.

$$\mathbf{Y} = [\,3 \;\; 2 \;\; 0 \;\; -1\,]' \,, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Psi} = \mathbf{I} \,, \quad \sigma^2 = 2$$

$$\theta^M = (\Phi'\Psi^{-1}\Phi)^{-1}\Phi'\Psi^{-1}Y$$

$$\theta^M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.b Ricavare, riportando i principali passaggi, la matrice varianza dei parametri stimati.

$$Var[\theta^M] = \sigma^2(\Phi'\Psi^{-1}\Phi)^{-1} = 2\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix}$$

$$Var[\theta^M] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

3.c Ricavare, riportando i principali passaggi, gli intervalli di confidenza al 95% per i parametri stimati.

$$I_{0.95}[\theta_i^M] = \left[\, \theta_i^M - 1.96\sqrt{Var[\theta_i^M]} \;,\; \theta_i^M + 1.96\sqrt{Var[\theta_i^M]} \,\right]$$

$$I_{0.95}[\theta_1^M] = [\,-0.3859 \;,\; 2.3859\,]$$

$$I_{0.95}[\theta_2^M] = [\,0.1235 \;,\; 1.8765\,]$$

3B. Si considerino i seguenti dati:

$y_1 = 3$	$y_2 = 2$	$y_3 = 0$	$y_4 = -1$
$t_1 = 0$	$t_2 = 1$	$t_3 = 3$	$t_4 = 4$

ed il modello:

$$y_k = \theta_1 + \theta_2 (t_k - 2) + v_k$$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $Var[v_k] = 4$.

3.a Ricavare, riportando i principali passaggi, la stima BLUE del vettore θ dei parametri.

$$\mathbf{Y} = [\,3 \quad 2 \quad 0 \quad -1\,]' , \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Psi} = \mathbf{I} , \quad \boldsymbol{\sigma}^2 = 4$$

$$\boldsymbol{\theta}^M = (\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{Y}$$

$$\boldsymbol{\theta}^M = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.b Ricavare, riportando i principali passaggi, la matrice varianza dei parametri stimati.

$$\mathbf{Var}[\boldsymbol{\theta}^M] = \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Phi})^{-1} = 4 \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Var}[\boldsymbol{\theta}^M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/5 \end{bmatrix}$$

3.c Ricavare, riportando i principali passaggi, gli intervalli di confidenza al 95% per i parametri stimati.

$$\mathbf{I}_{0.95}[\boldsymbol{\theta}_i^M] = \left[\ \boldsymbol{\theta}_i^M - 1.96 \sqrt{\mathbf{Var}[\boldsymbol{\theta}_i^M]} \ , \boldsymbol{\theta}_i^M + 1.96 \sqrt{\mathbf{Var}[\boldsymbol{\theta}_i^M]}\ \right]$$

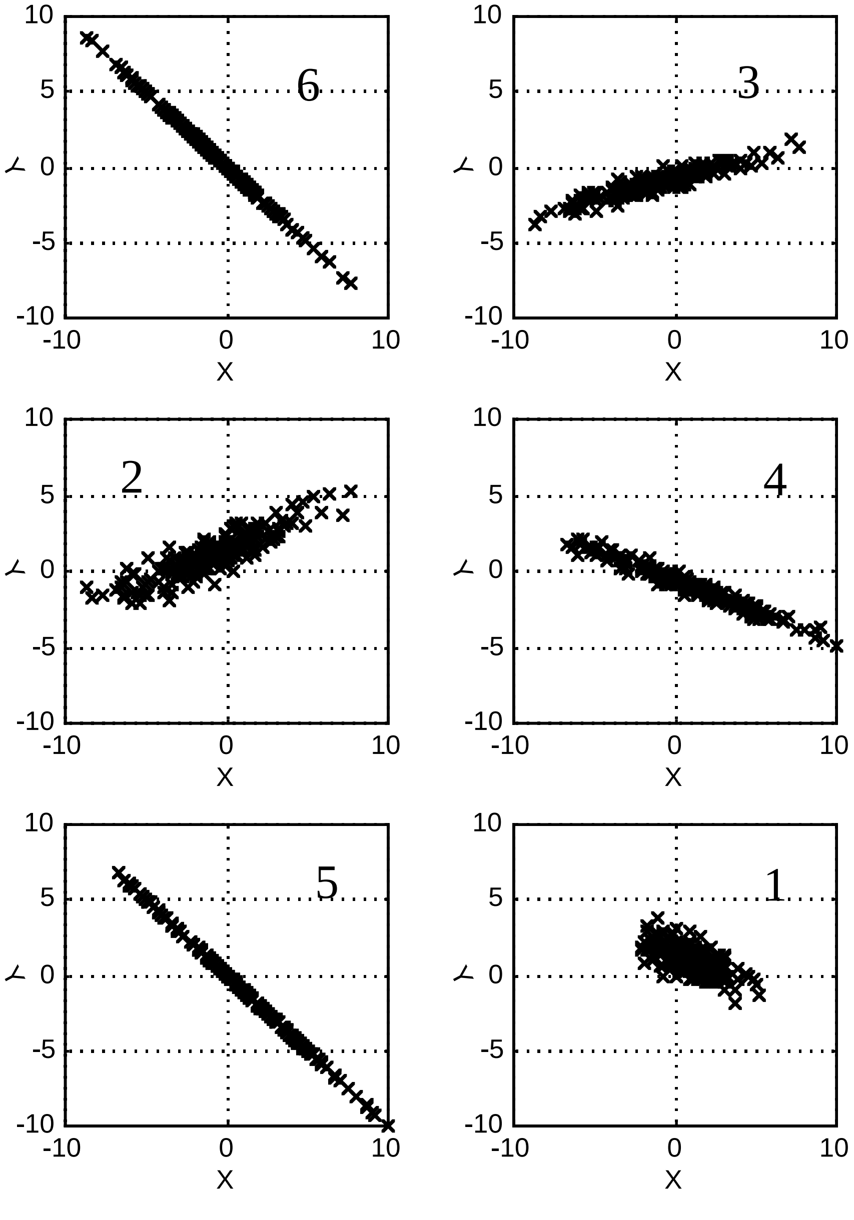
$$\mathbf{I}_{0.95}[\boldsymbol{\theta}_1^M] = [\,-0.96 \ , \ 2.96\,]$$

$$\mathbf{I}_{0.95}[\boldsymbol{\theta}_2^M] = [\,-2.2396 \ , \ 0.2396\,]$$

4A. Date due V.C. V e W congiuntamente gaussiane con E[V] = 1, E[W] =-1, Var[V] = 2, Var[W] = 1, Cov[V,W] = 1, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y:

1. X= V
   Y= -W
2. X = V + 2W
   Y = V
3. X = V + 2W
   Y = W
4. X= 2V + W
   Y= - V
5. X = 2V + W
   Y = - 2V - W
6. X = V + 2W
   Y = -V - 2W

Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta.



4B. Date due V.C. V e W congiuntamente gaussiane con E[V] = 1, E[W] =-1, Var[V] = 2, Var[W] = 1, Cov[V,W] = 1, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y:

1. X= V
   Y= -W
2. X = V + 2W
   Y = V
3. X = V + 2W
   Y = W
4. X= 2V + W
   Y= - V
5. X = 2V + W
   Y = - 2V - W
6. X = V + 2W
   Y = -V - 2W

Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta.