Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati 11/2/2005

1. Si consideri il lancio di 4 dadi. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi.

1.a Esce 4 volte il "6".

$\mathbf{(1/6)^4 = 0.00077}$

1.b Esce un solo "6".

E' la probabilità di avere un solo successo su 4 tentativi: si calcola con la binomiale.

$\mathbf{4\ (1/6)\ (5/6)^3 = 0.386}$

1.c Esce almeno un "6".

$\mathbf{1 - (5/6)^4 = 0.518}$

1.d Non esce nessun "6".

$\mathbf{(5/6)^4 = 0.482}$

2.a Enunciare il teorema che fornisce la ddp di Y=g(X) in funzione della ddp di X.

2.b Si consideri una V.C. X distribuita in modo uniforme in [0,1]. Calcolare la ddp di Y=exp(X).

Si definisca $x_1(y)$ come la soluzione dell'equazione y = exp(x), vale a dire $x_1(y) = \ln y$. Allora,

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1(y))}{|g'(x_1(y))|} = \frac{1}{\exp(x_1(y))} = \frac{1}{y},\ 1 \le y \le \exp(1)$$

$$f_Y(y) = 0, \text{ altrove}$$

2.c Calcolare E[Y].

$$E[Y] = \int_1^{\exp(1)} y \frac{1}{y}\, dy = \exp(1) - 1$$

3. Si considerino le V.C. X_i, i=1,…,N, i.i.d. con $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$. Dimostrare che la media campionaria converge in media quadratica ad m.

4. Si considerino i seguenti dati:

$y_1 = -3$	$y_2 = 0$	$y_3 = 0.5$	$y_4 = 2$
$x_1 = -2$	$x_2 = -1$	$x_3 = 1$	$x_4 = 2$

ed il modello:

$y_k = \theta + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $Var[v_k] = x_k^2$.

4.a Ricavare, riportando i principali passaggi, la stima BLUE di θ.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0.5 & 2 \end{bmatrix}', \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^2 = 1$$

$$\boldsymbol{\theta}^M = (\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{Y} = 0.1$$

4.b Sotto l'ipotesi che gli errori di misura siano gaussiani, ricavare, riportando i principali passaggi, gli intervalli di confidenza al 95% per θ.

$$\mathbf{Var}[\boldsymbol{\theta}^M] = \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Phi})^{-1} = 0.4$$

$$\mathbf{I}_{0.95}[\boldsymbol{\theta}^M] = \left[\ \boldsymbol{\theta}^M - 1.96\sqrt{\mathbf{Var}[\boldsymbol{\theta}^M]}\ ,\ \boldsymbol{\theta}^M + 1.96\sqrt{\mathbf{Var}[\boldsymbol{\theta}^M]}\ \right] = [\ - -1.1396\ ,\ 1.3396\ ]$$