1A. Si considerino i seguenti dati:

$y_1 = 1$	$y_2 = 0$	$y_3 = -2$	$y_4 = -1$
$t_1 = 0$	$t_2 = \pi/2$	$t_3 = \pi$	$t_4 = 3\pi/2$

ed il modello:

$$y_k = \theta_1 \sin(t_k) + \theta_2 \cos(t_k) + v_k$$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $Var[v_k] = 2$.

1.a Ricavare, riportando i principali passaggi, la stima BLUE del vettore θ dei parametri.

$$\mathbf{Y} = [\,1 \quad 0 \quad -2 \quad -1\,]' , \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Psi} = \mathbf{I} , \quad \boldsymbol{\sigma}^2 = 2$$

$$\boldsymbol{\theta}^M = (\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{Y}$$

$$\boldsymbol{\theta}^M = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

1.b Ricavare, riportando i principali passaggi, la matrice varianza dei parametri stimati.

$$\mathbf{Var}[\boldsymbol{\theta}^M] = \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Phi})^{-1} = 2\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Var}[\boldsymbol{\theta}^M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.c Ricavare, riportando i principali passaggi, gli intervalli di confidenza al 95% per i parametri stimati.

$$\mathbf{I}_{0.95}[\boldsymbol{\theta}_i^M] = \left[\ \boldsymbol{\theta}_i^M - 1.96\sqrt{\mathbf{Var}[\boldsymbol{\theta}_i^M]}\ ,\ \boldsymbol{\theta}_i^M + 1.96\sqrt{\mathbf{Var}[\boldsymbol{\theta}_i^M]}\ \right]$$

$$\mathbf{I}_{0.95}[\boldsymbol{\theta}_1^M] = [\,-1.46\ ,\ 2.46\,]$$

$$\mathbf{I}_{0.95}[\boldsymbol{\theta}_2^M] = [\,-0.46\ ,\ 3.46\,]$$

1B. Si considerino i seguenti dati:

$y_1 = 1$ $y_2 = 0$ $y_3 = -2$ $y_4 = -1$

$t_1 = 0$ $t_2 = \pi/2$ $t_3 = \pi$ $t_4 = 3\pi/2$

ed il modello:

$y_k = \theta_1 \sin(t_k) + \theta_2 \cos(t_k) + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $Var[v_k] = 1$.

1.a Ricavare, riportando i principali passaggi, la stima BLUE del vettore θ dei parametri.

$$\mathbf{Y} = [\ 1 \quad 0 \quad -2 \quad -1\ ]' , \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Psi} = \mathbf{I} , \quad \sigma^2 = 1$$

$$\theta^M = (\Phi'\Psi^{-1}\Phi)^{-1}\Phi'\Psi^{-1}Y$$

$$\theta^M = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

1.b Ricavare, riportando i principali passaggi, la matrice varianza dei parametri stimati.

$$Var[\theta^M] = \sigma^2(\Phi'\Psi^{-1}\Phi)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$Var[\theta^M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

1.c Ricavare, riportando i principali passaggi, gli intervalli di confidenza al 95% per i parametri stimati.

$$I_{0.95}[\theta_i^M] = \left[\ \theta_i^M - 1.96\sqrt{Var[\theta_i^M]} \quad , \theta_i^M + 1.96\sqrt{Var[\theta_i^M]}\ \right]$$

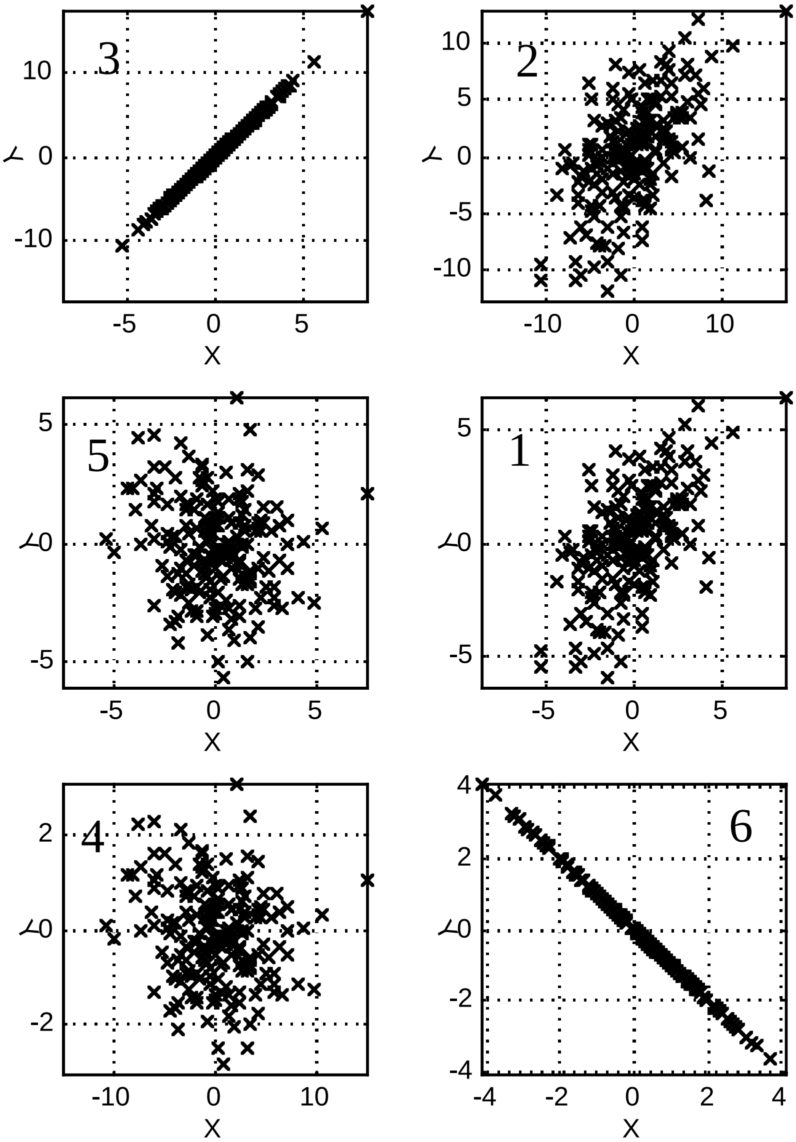
$$I_{0.95}[\theta_1^M] = [\ -0.8859 \ , \ 1.8859\ ]$$

$$I_{0.95}[\theta_2^M] = [\ -0.1141 \ , \ 2.8859\ ]$$

2A. Date due V.C. V e W congiuntamente gaussiane e indipendenti tra di loro con Var[V] = 2, Var[W] = 1, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y:

1. X= V+ W Y= V-W	2. X = 2V + 2W Y = 2V - 2W	3. X = V + W Y = 2V + 2W
4. X= 2V Y=W	5. X = V Y = 2W	6. X = 0.5V - W Y = -0.5V + W

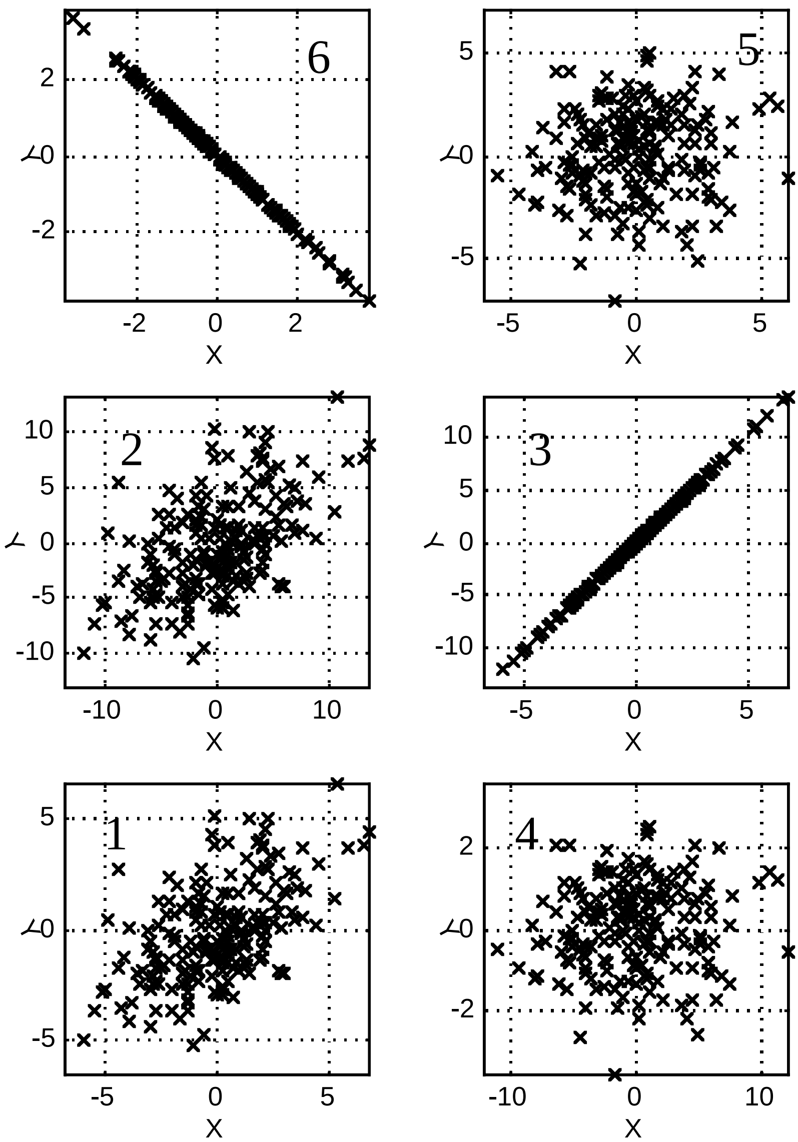
Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta



2B. Date due V.C. V e W congiuntamente gaussiane e indipendenti tra di loro con Var[V] = 2, Var[W] = 1, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y:

1. X= V+ W Y= V-W	2. X = 2V + 2W Y = 2V - 2W	3. X = V + W Y = 2V + 2W
4. X= 2V Y=W	5. X = V Y = 2W	6. X = 0.5V - W Y = -0.5V + W

Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta



3A. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
Siano $X = [X_1\ X_2]'$, $Y = [Y_1\ Y_2]'$ due vettori casuali tali che $Y = AX$, dove A è una matrice. Se Var[X] e A sono matrici diagonali, allora $Var[Y] = A^2*Var[X]$.	■	❑
Se la varianza di uno stimatore non polarizzato tende a zero al crescere del numero di dati, lo stimatore è consistente.	■	❑
La media campionaria delle V.C. i.i.d. normali X_i , $i = 1,\dots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, è uno stimatore a minima varianza.	■	❑
Data una V.C. $X \sim N(m_X,\sigma_X^2)$, sia $Y = aX+b$, $Z = cX$, $ac > 0$. Allora, Y e Z sono congiuntamente gaussiane con $Cov[Y,Z] = ac\sigma_X^2$, $r_{YZ} = 1$.	■	❑
Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\dots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i]$ ignota. Allora, per $N\rightarrow\infty$, l'intervallo di confidenza al 95% per m tende a $I_{0.95} = [M_1-1.96S_c/\sqrt{N}, M_1+1.96S_c/\sqrt{N}]$.	■	❑
Date due V.C. X ed Y congiuntamente gaussiane, risulta che $Var[X \mid Y=y]$ non dipende da y.	■	❑
La stima ai minimi quadrati del modello $y_k=\theta+v_k$ può avere un SSR minore di quello della stima ai minimi quadrati del modello $y_k=\theta_1x_k+\theta_2x_k^2+v_k$.	■	❑
Sotto le sue condizioni di applicabilità, il criterio MDL, a differenza di FPE ed AIC, è uno stimatore asintoticamente consistente del numero di parametri di un modello.	■	❑
Lo stimatore BLUE coincide con quello LS se e solo se Var[V] è diagonale.	❑	■
I momenti campionari delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\dots,N$, sono asintoticamente normali.	■	❑

3B. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- La stima ai minimi quadrati del modello $y_k=\theta+v_k$ può avere un SSR minore di quello della stima ai minimi quadrati del modello $y_k=\theta_1 x_k+\theta_2 x_k^2+v_k$.

  ■ ❑

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i]$ ignota. Allora, per $N\rightarrow\infty$, l'intervallo di confidenza al 95% per m tende a $I_{0.95} = [M_1\text{-}1.96S_c/\sqrt{N},M_1+1.96S_c/\sqrt{N}]$.

  ■ ❑

- Date due V.C. X ed Y congiuntamente gaussiane, risulta che $Var[X\,|\,Y=y]$ non dipende da y.

  ■ ❑

- Sotto le sue condizioni di applicabilità, il criterio MDL, a differenza di FPE ed AIC, è uno stimatore asintoticamente consistente del numero di parametri di un modello.

  ■ ❑

- Lo stimatore BLUE coincide con quello LS se e solo se Var[V] è diagonale.

  ❑ ■

- I momenti campionari delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, sono asintoticamente normali.

  ■ ❑

- Siano $X = [X_1\ X_2]'$, $Y = [Y_1\ Y_2]'$ due vettori casuali tali che $Y = AX$, dove A è una matrice. Se Var[X] e A sono matrici diagonali, allora $Var[Y] = A^2{*}Var[X]$.

  ■ ❑

- Se la varianza di uno stimatore non polarizzato tende a zero al crescere del numero di dati, lo stimatore è consistente.

  ■ ❑

- La media campionaria delle V.C. i.i.d. normali X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] =\sigma^2$, è uno stimatore a minima varianza.

  ■ ❑

- Data una V.C. $X \sim N(m_X,\sigma_X^2)$, sia $Y = aX+b$, $Z = cX, ac > 0$. Allora, Y e Z sono congiuntamente gaussiane con $Cov[Y,Z] = ac\sigma_X^2$, $r_{YZ} = 1$.

  ■ ❑

4A. Si considerino delle V.C. i.i.d. gaussiane X_i , $i = 1,\ldots,N$, $Var[X_i] = \sigma^2$. Si vuole fissare N in modo tale che l'intervallo di confidenza al 95% per la media campionaria abbia ampiezza circa uguale a L (si intende L = estremo superiore - estremo inferiore).

Si considerino le seguenti alternative per i valori di L e σ:

1. $L= 0.001$, $\sigma= 0.01$
2. $L = 0.02$, $\sigma= 0.1$
3. $L =1$, $\sigma= 1$
4. $L= 5$, $\sigma= 10$
5. $L = 40$, $\sigma= 100$
6. $L = 50$, $\sigma= 200$

Scrivere nei riquadri accanto ai valori di N il numero della scelta corretta

4 N = 62	1 N = 1537
6 N = 246	3 N = 16
5 N = 97	2 N = 385

5A. **Domanda facoltativa**
Si considerino le seguenti istruzioni MatLab. I vettori colonna h e w contengono altezze e pesi misurati in N soggetti.

```
Dati=[h w];
a=mean(Dati);
b=cov(Dati);
c=a(2)+b(1,2)*(Dati(:,1)-a(1))/b(1,1);
```

Dire, motivando la risposta, cosa è il vettore c.

Il vettore c contiene la predizione dei pesi in funzione delle altezze. Tale predizione è calcolata come valore atteso condizionato ipotizzando che pesi e altezze siano V.C. congiuntamente gaussiane.

4B. Si considerino delle V.C. i.i.d. gaussiane X_i , $i = 1,\ldots,N$, $Var[X_i] = \sigma^2$. Si vuole fissare N in modo tale che l'intervallo di confidenza al 95% per la media campionaria abbia ampiezza circa uguale a L (si intende L = estremo superiore - estremo inferiore).

Si considerino le seguenti alternative per i valori di L e σ:

1. $L= 5$ $\sigma= 10$	2. $L = 40$ $\sigma= 100$	3 $L = 50$ $\sigma= 200$
4. $L= 0.001$ $\sigma= 0.01$	5. $L = 0.02$ $\sigma= 0.1$	6. $L =1$ $\sigma= 1$

Scrivere nei riquadri accanto ai valori di N il numero della scelta corretta

4 N = 1537	1 N = 62
5 N = 385	2 N = 97
6 N = 16	3 N = 246

5B. **Domanda facoltativa**
Si considerino le seguenti istruzioni MatLab. I vettori colonna h e w contengono altezze e pesi misurati in N soggetti.

```
Dati=[h w];

a=mean(Dati);

b=cov(Dati);

c=a(2)+b(1,2)*(Dati(:,1)-a(1))/b(1,1);
```

Dire, motivando la risposta, cosa è il vettore c.

Il vettore c contiene la predizione dei pesi in funzione delle altezze. Tale predizione è calcolata come valore atteso condizionato ipotizzando che pesi e altezze siano V.C. congiuntamente gaussiane.