1A. Si considerino due V.C. X_1 e X_2, indipendenti, aventi le seguenti medie e varianze:

$E[X_1] = 2m,\quad E[X_2] = m,\quad Var[X_1] = \sigma^2,\quad Var[X_2] = \sigma^2.$

Per stimare il parametro incognito m, si usa lo stimatore

$\hat{m} = \alpha X_1 + \beta X_2$

dove α e β sono numeri reali da scegliere opportunamente (per esempio, se $\alpha=\beta=1/2$, lo stimatore $\hat{m}$ coincide con la media campionaria).

1.a Supponendo che α sia dato, dire, motivando la risposta, quale condizione deve soddisfare β affinché lo stimatore $\hat{m}$ sia non polarizzato.

$E[\hat{m}] = \alpha E[X_1] + \beta\, E[X_2] = (2\alpha+\beta)\, m$

Affinché $(2\alpha+\beta)\, m = m$, deve essere $\beta = 1 - 2\alpha$

1.b Calcolare $Var[\hat{m}]$ in funzione di α, β, σ^2.

$Var[\hat{m}] = \alpha^2\sigma^2 + \beta^2\sigma^2$

1.c Determinare α e β in modo che $\hat{m}$ sia non polarizzato e a minima varianza.
Suggerimento: si scelga β in modo che soddisfi la condizione ricavata al punto 1.a e si minimizzi la varianza rispetto ad α.

$J = Var[\hat{m}] = \alpha^2\sigma^2 + (1 - 2\alpha)^2\sigma^2$

Impongo $dJ/d\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha\sigma^2 - 4(1 - 2\alpha)\sigma^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{5}$, $\beta = 1 - 2\alpha = \frac{1}{5}$

$(d^2J/d\alpha^2 = 10\sigma^2 > 0$, purché $\sigma^2 > 0)$

2A. Si considerino i seguenti dati:

$y_1 = 3 \qquad y_2 = -2 \qquad y_3 = 0.5$
$t_1 = 0 \qquad t_2 = 2 \qquad t_3 = -1$

Vengono presi in considerazione i seguenti modelli:

1) $y_k = \theta_1 + \theta_2\, t_k + v_k$
2) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k/2) + \theta_2 + v_k$
3) $y_k = \theta_1 \cos(\pi t_k/2) + \theta_2 + v_k$
4) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k/2) + \theta_2 \cos(\pi t_k/2) + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $Var[v_1] = Var[v_3] = 1$, $Var[v_2] = 2$.

Si supponga di calcolare la stima del vettore θ dei parametri mediante lo stimatore di Gauss-Markov. Di seguito sono riportate le inverse delle matrici di covarianza dei parametri stimati per tutti e quattro i casi. Scrivere nelle caselle accanto alle matrici il numero del modello corrispondente.

$\boxed{4}$ $$(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{1}$ $$(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ $$(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ $$(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

3A. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Se $Y = \Phi\theta + V$, con V distribuito gaussianamente, allora θ^{LS} è gaussiano.

  ■ ❑

- Se uno stimatore è asintoticamente non polarizzato allora è anche consistente.

  ❑ ■

- Si consideri il modello $y_k = \theta x_k^2 + v_k$, $k=1,\ldots,N$, dove x_k sono noti e v_k sono errori di misura. Allora $\theta^{LS} = \sum_{k=1}^{N} y_k x_k^2 \,/ \sum_{k=1}^{N} x_k^4$.

  ■ ❑

- Nella stima BLUE, quando $Var[V] = \sigma^2 I$, una stima non polarizzata di $Var[\theta^M]$ è data da SSR/(N-q).

  ❑ ■

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = 10$. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [M_1 - 19.6/\sqrt{N}, M_1 + 19.6/\sqrt{N}]$.

  ❑ ■

- La varianza campionaria S^2 delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, è uno stimatore di σ^2 asintoticamente non polarizzato e consistente.

  ■ ❑

- Si indichi con S^2 la varianza campionaria (non corretta) delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$. Allora, $E[S^2] = \sigma^2(N-1)/N$

  ■ ❑

- Se X e Y sono due V.C. congiuntamente gaussiane con $E[XY] \neq E[X]E[Y]$, allora X e Y non sono indipendenti.

  ■ ❑

- La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, converge in media quadratica a m.

  ■ ❑

- La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, converge in distribuzione ad una gaussiana.

  ■ ❑

4A. Si considerino delle V.C. i.i.d. gaussiane X_i , i = 1,…,N, $Var[X_i] = \sigma^2$. Si vuole fissare N in modo tale che l'intervallo di confidenza al 95% per la media campionaria abbia ampiezza circa uguale a L (si intende L = estremo superiore - estremo inferiore).

Si considerino le seguenti alternative per i valori di L e σ:

1. L= 0.5, σ= 1
2. L = 0.1, σ= 2
3. L =1, σ= 5
4. L= 0.6, σ= 10
5. L = 20, σ= 50
6. L = 100, σ= 100

Scrivere nei riquadri accanto ai valori di N il numero della scelta corretta

[2] N = 6147	[6] N = 16
[4] N = 4269	[1] N = 62
[5] N = 97	[3] N = 385

5A. **Domanda facoltativa**
Si considerino le seguenti istruzioni MatLab. I vettori colonna h e w contengono altezze e pesi misurati in N soggetti. Il seguente codice è stato scritto per predire il valore dell'altezza in funzione del peso.

```
Dati=[h w];

a=mean(Dati);

b=cov(Dati);

hpred=a(2)+b(1,1)*(Dati(:,1)-a(1))/b(1,2);
```

Dire motivando la risposta se il codice è corretto. Se non lo fosse, correggerlo.

Non è corretto perchè usa le altezze e non i pesi per predire le altezze. Inoltre, al denominatore ci vuole la varianza di w e non la covarianza. La formula corretta è:

```
hpred=a(1)+b(1,2)*(Dati(:,2)-a(2))/b(2,2);
```

1B. Si considerino due V.C. X_1 e X_2, indipendenti, aventi le seguenti medie e varianze:

$E[X_1] = m$, $E[X_2] = 2m$, $Var[X_1] = \sigma^2$, $Var[X_2] = \sigma^2$.

Per stimare il parametro incognito m, si usa lo stimatore

$\hat{m} = \alpha X_1 + \beta X_2$

dove α e β sono numeri reali da scegliere opportunamente (per esempio, se $\alpha=\beta=1/2$, lo stimatore $\hat{m}$ coincide con la media campionaria).

1.a Supponendo che α sia dato, dire, motivando la risposta, quale condizione deve soddisfare β affinché lo stimatore $\hat{m}$ sia non polarizzato.

$E[\hat{m}] = \alpha E[X_1] + \beta E[X_2] = (\alpha+2\beta)\, m$

Affinché $(\alpha+2\beta)\, m = m$, deve essere $\beta = (1 - \alpha)/2$

1.b Calcolare $Var[\hat{m}]$ in funzione di α, β, σ^2.

$Var[\hat{m}] = \alpha^2\sigma^2 + \beta^2\sigma^2$

1.c Determinare α e β in modo che $\hat{m}$ sia non polarizzato e a minima varianza.
Suggerimento: si scelga β in modo che soddisfi la condizione ricavata al punto 1.a e si minimizzi la varianza rispetto ad α.

$J = Var[\hat{m}] = \alpha^2\sigma^2 + (1 - \alpha)^2\sigma^2/4$

Impongo $dJ/d\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha\sigma^2 - (1 - \alpha)\sigma^2/2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{5}$, $\beta = 1 - 2\,\alpha = \frac{1}{5}$

($d^2J/d\alpha^2 = 5\sigma^2/2 > 0$, purché $\sigma^2 > 0$)

2B. Si considerino i seguenti dati:

$y_1 = 3$ $y_2 = -2$ $y_3 = 0.5$
$t_1 = 0$ $t_2 = 1$ $t_3 = -2$

Vengono presi in considerazione i seguenti modelli:

1) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k/2) + \theta_2 \cos(\pi t_k/2) + v_k$
2) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k/2) + \theta_2 + v_k$
3) $y_k = \theta_1 \cos(\pi t_k/2) + \theta_2 + v_k$
4) $y_k = \theta_1 + \theta_2 t_k + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $Var[v_1] = Var[v_3] = 1$, $Var[v_2] = 2$.

Si supponga di calcolare la stima del vettore θ dei parametri mediante lo stimatore di Gauss-Markov. Di seguito sono riportate le inverse delle matrici di covarianza dei parametri stimati per tutti e quattro i casi. Scrivere nelle caselle accanto alle matrici il numero del modello corrispondente.

$\boxed{4}$ $(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1.5 \\ -1.5 & 4.5 \end{bmatrix}$

$\boxed{1}$ $(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{3}$ $(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ $(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{bmatrix}$

3B. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Se X e Y sono due V.C. congiuntamente gaussiane con $E[XY] \neq E[X]E[Y]$, allora X e Y non sono indipendenti.

■ ❑

- Se $Y = \Phi\theta + V$, con V distribuito gaussianamente, allora θ^{LS} è gaussiano.

■ ❑

- La varianza campionaria S^2 delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, è uno stimatore di σ^2 asintoticamente non polarizzato e consistente.

■ ❑

- Si indichi con S^2 la varianza campionaria (non corretta) delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$. Allora, $E[S^2] = \sigma^2(N-1)/N$

■ ❑

- La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, converge in media quadratica a m.

■ ❑

- La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, converge in distribuzione ad una gaussiana.

■ ❑

- Se uno stimatore è asintoticamente non polarizzato allora è anche consistente.

❑ ■

- Si consideri il modello $y_k = \theta x_k^2 + v_k$, $k=1,\ldots,N$, dove x_k sono noti e v_k sono errori di misura. Allora $\theta^{LS} = \sum_{k=1}^{N} y_k x_k^2 \,/\, \sum_{k=1}^{N} x_k^4$.

■ ❑

- Nella stima BLUE, quando $Var[V] = \sigma^2 I$, una stima non polarizzata di $Var[\theta^M]$ è data da $SSR/(N-q)$.

❑ ■

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = 10$. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [M_1 - 19.6/\sqrt{N}, M_1 + 19.6/\sqrt{N}]$.

❑ ■

4B. Si considerino delle V.C. i.i.d. gaussiane X_i , $i = 1,\ldots,N$, $Var[X_i] = \sigma^2$. Si vuole fissare N in modo tale che l'intervallo di confidenza al 95% per la media campionaria abbia ampiezza circa uguale a L (si intende L = estremo superiore - estremo inferiore).

Si considerino le seguenti alternative per i valori di L e σ:

1. $L= 0.6$, $\sigma= 10$	2. $L = 20$, $\sigma= 50$	3. $L = 100$, $\sigma= 100$
4. $L= 0.5$, $\sigma= 1$	5. $L = 0.1$, $\sigma= 2$	6. $L =1$, $\sigma= 5$

Scrivere nei riquadri accanto ai valori di N il numero della scelta corretta

5 N = 6147	6 N = 385
2 N = 97	4 N = 62
3 N = 16	1 N = 4269

5B. **Domanda facoltativa**
Si considerino le seguenti istruzioni MatLab. I vettori colonna h e w contengono altezze e pesi misurati in N soggetti. Il seguente codice è stato scritto per predire il valore dell'altezza in funzione del peso.

```
Dati=[h w];

a=mean(Dati);

b=cov(Dati);

hpred=a(2)+b(1,1)*(Dati(:,1)-a(1))/b(1,2);
```

Dire motivando la risposta se il codice è corretto. Se non lo fosse, correggerlo.

Non è corretto perchè usa le altezze e non i pesi per predire le altezze. Inoltre, al denominatore ci vuole la varianza di w e non la covarianza. La formula corretta è:

```
hpred=a(1)+b(1,2)*(Dati(:,2)-a(2))/b(2,2);
```