

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati MN

Prof. G. De Nicolao

Prova scritta - 4 Maggio 2007

Cognome..... **Nome**.....

Matricola..... **Firma**.....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli aggiuntivi, al termine della prova.

1.
2.
3.
4.

1. Siano X e Y due V.C. congiunte aventi ddp congiunta $f_{XY}(x, y)$. Dimostrare, riportando i passaggi che
 - Se X e Y sono indipendenti, sono anche incorrelate.

- Se X e Y sono incorrelate, $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$.

2. Una prova di esame consiste di 5 domande vero/falso. Ogni risposta esatta aggiunge un punto ed ogni errore ne toglie uno. Si supera l'esame se il punteggio complessivo è maggiore o uguale a 2. Uno studente, non avendo studiato la materia, decide di rispondere a caso.
- Dire motivando la risposta con che probabilità supera l'esame se risponde solo alle prime 2 domande e si astiene nelle altre.

Il numero di risposte esatte corrisponde al numero di successi in prove di Bernoulli con probabilità di successo $p = 0.5$. Indicando con $p_n(k)$ la probabilità di ottenere k successi su n prove, si ha

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Se lo studente risponde solo alle prime 2 domande, supera l'esame solo se entrambe le risposte sono esatte: $p_2(2) = 1/4$.

- Dire motivando la risposta con che probabilità supera l'esame se risponde solo alle prime 3 domande e si astiene nelle altre.

Se lo studente risponde solo alle prime 3 domande, supera l'esame solo se tutte le risposte sono esatte: $p_3(3) = 1/8$.

- Dire motivando la risposta con che probabilità supera l'esame se risponde solo alle prime 4 domande e si astiene nelle altre.

Se lo studente risponde solo alle prime 4 domande, supera l'esame se tutte le risposte sono esatte oppure se commette un solo errore: $p_4(4) + p_4(3) = 1/16 + 4/16 = 5/16$.

- Dire motivando la risposta con che probabilità supera l'esame se risponde a tutte le domande.

Se lo studente risponde solo alle prime 5 domande, supera l'esame se tutte le risposte sono esatte oppure se commette un solo errore: $p_5(5) + p_5(4) = 1/32 + 5/32 = 3/16$.

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

- (a) Se A e B sono eventi disgiunti, allora $P(B) = 1 - P(A)$.

☐ ☒

- (b) La probabilità di ottenere un solo successo in n prove di Bernoulli è $1 - (1 - p)^n$.

☐ ☒

- (c) Se A e B sono eventi indipendenti, allora $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AC) - P(BC)$.

☐ ☒

- (d) Data una V.C. X , risulta sempre $F_X(E[X]) = 0.5$.

☐ ☒

- (e) Sia $Y = \ln X$, dove X è una V.C. uniforme in $(0, 1)$. Allora, $f_Y(y) = e^y$, $y > 0$.

☐ ☒

- (f) Se X è una V.C. uniforme in $[0, \pi]$, allora $E[\sin(X)] = 0$.

☐ ☒

- (g) $Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$ se e solo se X e Y sono incorrelate.

☐ ☒

- (h) Le coordinate X e Y di un punto scelto in modo equiprobabile nel rettangolo $0 \leq X \leq 2$, $0 \leq Y \leq 1$ sono V.C. indipendenti.

☒ ☐

- (i) $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) - F_{XY}(x_1, y_2) + F_{XY}(x_1, y_1)$.

☒ ☐

- (j) $E[g(X) + h(Y)] = E[g(X)] + E[h(Y)]$ se e solo se X e Y sono incorrelate.

☐ ☒

4. Date due V.C. V e W gaussiane standard indipendenti, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y :

- | | | |
|----------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|
| 1. $X = 2V + W$
$Y = -2V - W$ | 2. $X = V + 0.5W$
$Y = -2V - W$ | 3. $X = V + W$
$Y = 2V - 2W$ |
| 4. $X = 2V - 2W$
$Y = V + W$ | 5. $X = 4V + 3W$
$Y = 5V$ | 6. $X = 4V + W$
$Y = 5V$ |

Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta.

